Mérési jegyzőkönyv:

Rugalmas állandók mérése

(hétfői csoport)

Rakyta Péter

2006. március 20.

1. Bevezetés

A mérés célja nemcsak a kiadott minták rugalmas állandóinak, vagy tehetetlenségi nyomatékának a megmérése, hanem az elméleti úton levezethető összefüggések kvalitatív jellegének bizonyítása is. (Például, hogy a lehajlás a minta hosszának köbével arányos.) Az elméleti összefüggések és levezetéseik szerepelnek a jegyzetben[1], ezért nem szükséges rájuk külön kitérnem. A mérés első részében egy mindkét végén befogott, középen terhelt rúd lehajlását fogom vizsgálni különböző keresztmetszetek esetén. A középpont lehajlását az erő függvényében az alábbi összefüggés adja meg:

$$s = \frac{1}{48}\frac{l^3}{EI}F \tag{1}$$

,ahol E a Young-modulusz, I a keresztmetszeti tényező, F a terhelőerő és l pedig a rúd hossza. A különböző terhelések alkalmazását egy kétkarú emelő elvén működő berendezés tette lehetővé, melynek egyik karjára különböző súlyokat akasztottam. A rúd behajlását a műszeren található mérőóráról olvastam le (0.01 *mm*-es felbontással). A minták geometriai adatait csavarmikrométerrel mértem.

2. A téglalap alapú rúd mérése

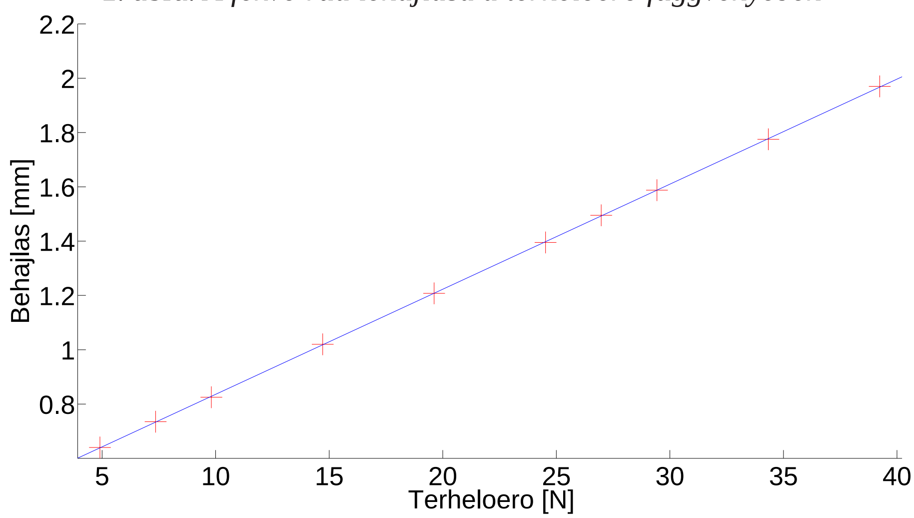
Elsőként egy téglalap alapú rúd[1] lehajlását mértem. (szélessége (7.895±0.010) *mm*, vastagsága (11.98 ± 0.01) *mm*) Az alátámasztási pontok távolságát $l = 40$ *cm* -re állítottam be 1 *mm* pontossággal. A mérés reprodukálásának érdekében kétszer mértem végig a lehajlásokat. (Nehéz volt ugyanis beállítani, hogy a rúd és a mérőóra nyelve ,,jól" érintkezzenek.) A számolásokhoz az értékek átlagát használtam. Először ,,fekvő" helyzetben mértem a rúd kihajlását. A súlyok kombinálásával kapott lehajlásokat az alábbi táblázat mutatja:

[1] A rúd jele $A3$ volt.

Erő $F\ [N/9.81\frac{m}{s^2}]$	**lehajlás** $s\ [10^{-2}mm]$	**lehajlás** $s\ [10^{-2}mm]$
0.50	0.63	0.65
0.75	0.73	0.74
1.00	0.82	0.83
1.50	1.015	1.025
2.00	1.205	1.21
2.50	1.38	1.41
2.75	1.49	1.50
3.00	1.575	1.60
3.50	1.76	1.79
4.00	1.965	1.975

Az (1) összefüggés szerint a pontoknak egy egyenesre kell illeszkedniük. Az illesztést az 1. ábra mutatja.

1. ábra. *A fekvő rúd lehajlása a terhelőerő függvényében*



Az illesztett egyenes meredeksége:

$$m = 3.87e\ 10^{-5}\frac{m}{N} \quad \delta m = 0.4\% \tag{2}$$

Most már csak a keresztmetszeti tényezőt kell ismernünk. Téglalap kereszt-metszet esetén: $I = (a^3b)/12$, ahol a az az oldal, mellyel párhuzamosan a terhelést alkalmazzuk. Ismerve a rúd méreteit:

$$I = 4.9128\ 10^{-10}m^2 \quad \delta I = 0.46\% \tag{3}$$

Ekkor az (1) képlet alapján a Young-modulusz:

$$\boxed{E = (7.01 \pm 0.08)10^{10} Pa} \tag{4}$$

Hasonló módon megmértem a Young-moduluszt a rúd ,,álló” helyzetében is. A mért adatokat az alábbi táblázat mutatja:

Erő $F\ [N/9.81\frac{m}{s^2}]$	**lehajlás** $s\ [10^{-2}mm]$	**lehajlás** $s\ [10^{-2}mm]$
0.50	0.73	0.73
0.75	0.77	0.785
1.00	0.805	0.82
1.50	0.89	0.91
2.00	0.97	0.99
2.50	1.07	1.08
2.75	1.10	1.12
3.00	1.15	1.16
3.50	1.23	1.245
4.00	1.32	1.33
5.00	1.48	1.50
6.00	1.65	1.67
6.50	1.72	1.74
8.00	1.97	1.99

Az (1) összefüggés szerint a pontoknak egy egyenesre kell illeszkedniük. Az illesztést a 2. ábra mutatja.

Az illesztett egyenes meredeksége:

$$m = 1.703e\ 10^{-5}\frac{m}{N} \quad \delta m = 0.82\% \tag{5}$$

Az ,,álló” rúd keresztmetszeti nyomatékát az előzőekhez hasonlóan az $I = (a^3 b)/12$ képletet használva:

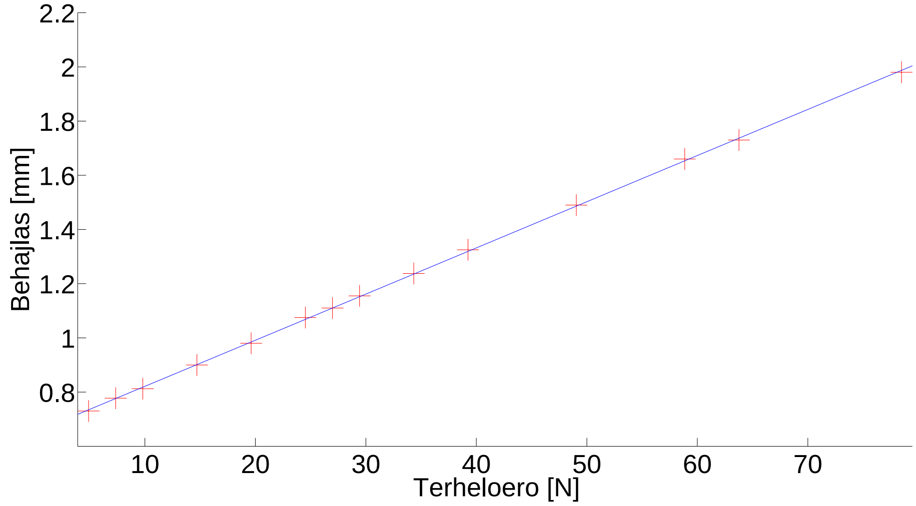
$$I = 1.1312\ 10^{-10} m^2 \quad \delta I = 0.38\% \tag{6}$$

Ekkor az (1) képlet alapján a Young-modulusz:

$$\boxed{E = (6.9 \pm 0.1)10^{10} Pa} \tag{7}$$

A rúd fekvő és álló helyzetében kimért Young-moduluszok nagyon jó egyezést mutatnak. Ez megnyugtató, hiszen a rugalmassági állandó az anyagra jellemző

2. ábra. *Az álló rúd lehajlása a terhelőerő függvényében*



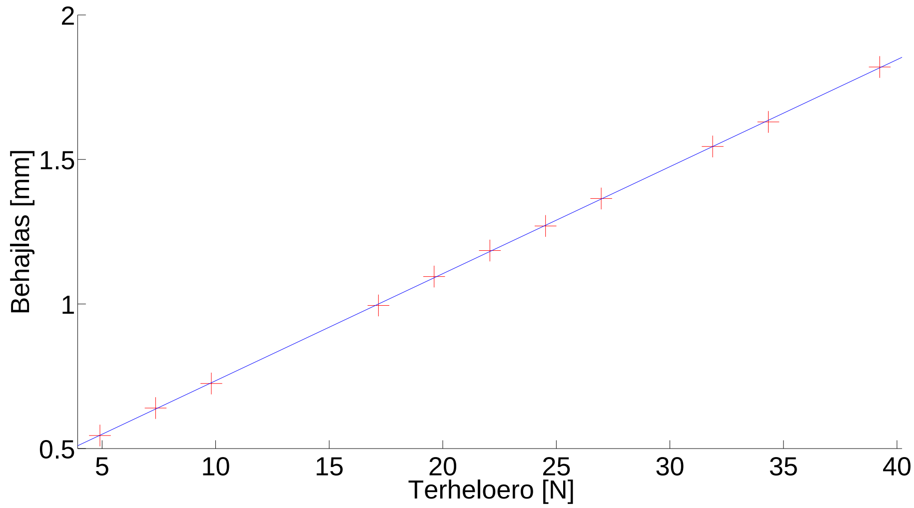
nem pedig a testre, vagy annak elhelyezkedésére. (Amennyire az anyag homogén és izotróp)

3. A henger alakú minta mérése

A henger alakú minta vizsgálata során az előzőekkel megegyező módon jártam el, kivéve, hogy már csak egy méréssorozatot végeztem el. Itt ugyanis egyszerűbb volt beállítani, hogy a rúd a mérőóra nyelvének a közepét nyomja. A rúd hosszát ebben az esetben is $l = 40$ cm-re állítottam be. Az eredményeket az alábbi táblázat mutatja:

erő F $[N]$	**lehajlás** s $[10^{-2}mm]$
0.50	0.545
0.75	0.64
1.00	0.725
1.75	0.995
2.00	1.095
2.25	1.185
2.50	1.27
2.75	1.365
3.25	1.545
3.50	1.63
4.00	1.82

3. ábra. *A henger alakú rúd lehajlása a terhelőerő függvényében*



Ebben az esetben az illesztett egyenes meredeksége (3. ábra):

$$m = 3.70\frac{m}{N} \quad \delta m = 0.62\% \tag{8}$$

A keresztmetszeti tényező[2], ha a henger átmérője $2r = 10.415$ mm:

$$I = 5.787m^2 \quad \delta I = 0.38\% \tag{9}$$

Mindebből a minta Young-modulusza:

[2] $I = \frac{\pi r^4}{4}$

$$\boxed{E = (6.24 \pm 0.08)10^{10} Pa} \tag{10}$$

4. A behajlás l^3-ös függésének ellenőrzése

A téglalap alapú mintával több különböző hossz esetén megmértem a lehajlást egy kicsi alapterhelés ($F_0 = 0.5 \cdot 9.81\ N$) és egy nagyobb terhelés ($F = 4.5 \cdot 9.81\ N$) esetén. A behajlásokat rendre s_0 és s_t jelöli a két esetben. A nagyobb F terheléshez így az $s = s_0 - s_t$ behajlás fog tartozni. A mért adatokat az alábbi táblázat mutatja.

hossz l $[cm]$	**„alap” lehajlás** s_0 $[10^{-2}mm]$	**„terhelt” lehajlás** s_t $[10^{-2}mm]$	**lehajlás** s $[10^{-2}mm]$
40	0.735	1.405	0.67
38	0.74	1.32	0.58
36	0.74	1.24	0.50
34	0.71	1.13	0.42
32	0.71	1.065	0.355
30	0.725	1.025	0.30
28	0.73	0.978	0.25
26	0.725	0.923	0.195

Ábrázolva a 4. ábrán a behajlást a hossz köbének függvényében, jó közelítéssel egyenest kapunk. Ezzel igazoltuk az (1) képlet érvényességét.

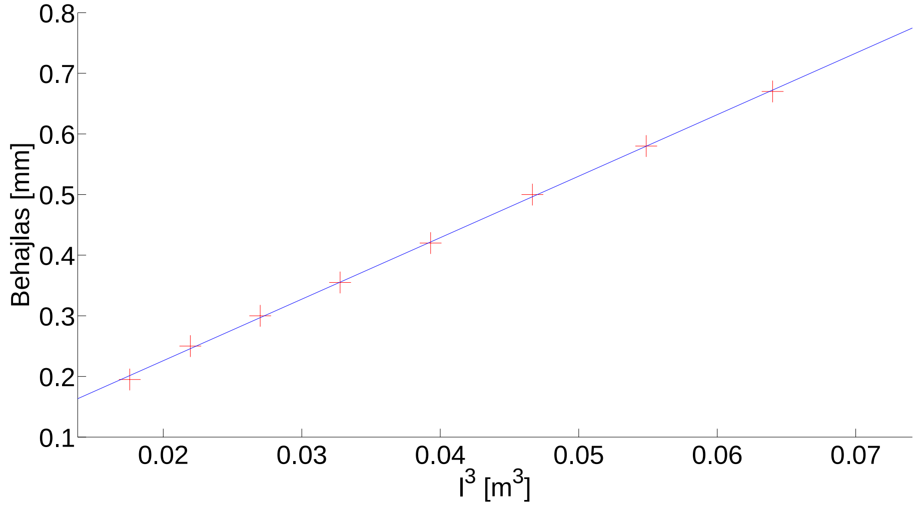
5. Torziómodulusz mérése torziós ingával

A jegyzetben[1] szereplő ismert képlet szerint:

$$G = K\frac{\Theta}{T^2} \tag{11}$$

,ahol G a torziómodulusz, Θ a torziósinga tehetetlenségi nyomatéka, T^2 az inga periódusideje, K pedig a torziós szál geometriájából származó konstans:

4. ábra. *A lehajlás a hossz köbének függvényében*



$$K = \frac{8\pi l}{r^4} \tag{12}$$

,ahol a méréshez használt konkrét ingánál $l = (59.0 \pm 0.5)$ cm a torziós szál hossza, $2r = (0.505 \pm 0.005)$ mm pedig az átmérője. Behelyettesítve az adatokat: $K = (3.6 \pm 0.2)10^{15}$ m^{-3}
Az ingának szerves részét képezte továbbá két, egyaránt $2R = (4.50 \pm 0.05)$ cm átmérőjű korong, melyek szimmetrikus elhelyezésével módosítani lehetett az inga tehetetlenségi nyomatékát. Tömegük $m_1 = 194.6465$ g és $m_2 = 196.2910$ g volt[3]. A tömegek hibája csak a megadott értékek utolsó tizedesjegyében mutatkozik meg, ezért ezt a hibaforrást elhanyagolhatjuk.
A mérési elrendezéshez hozzá tartozott egy elektromos mérőóra is, mellyel nagy pontossággal lehetett mérni a periódusidőket, valamint egy átlátszó ,,kalitka", mely megvédte az ingát a külső behatásoktól mozgása közben. Elméleti úton levezethető, hogy az inga periódusidejére az alábbi összefüggés érvényes:

$$T^2 = \frac{K}{G}(\Theta_u + \Theta_1 + \Theta_2) + \frac{K(m_1 + m_2)}{G}a^2 \tag{13}$$

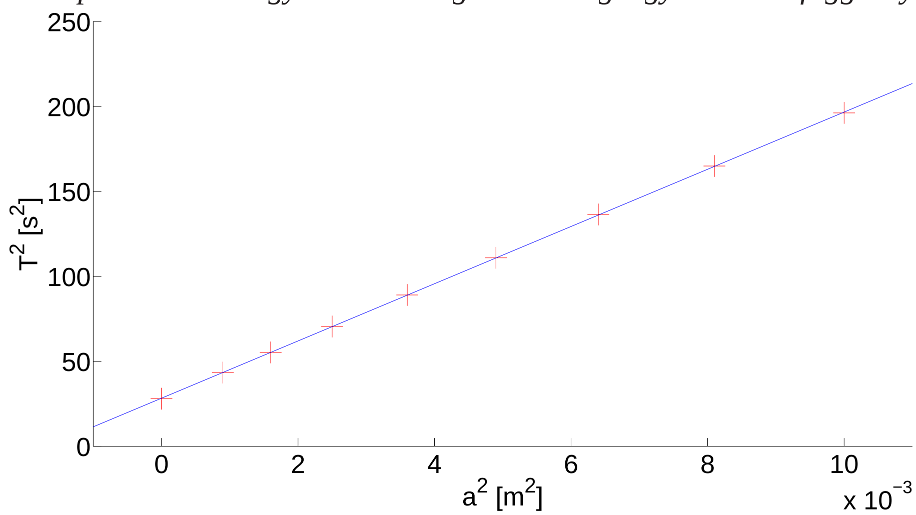
Az összefüggésben: Θ_u az üres inga tehetetlenségi nyomatéka, Θ_1 és Θ_2 a korongok tehetetlenégi nyomatéka, a pedig a korongok távolsága a torziós száltól. A mérőórával 10 periódus idejét mértem meg. Két méréssorozatot végeztem el a periódusidő megmérésére, az egymásnak megfelelő értékek átlagát használtam. Az adatokat az alábbi táblázat mutatja:

[3]rendre az 5. és 6. korongot használtam

Korongok távol-ságа: a [cm]	**Periódusidő** $10T$ [s]	**Periódusidő** $10T$ [s]	**Korongok távol-sága:** a^2 [$10^{-4}m^2$]	**Periódusidő** T^2 [s^2]
0	52.930	52.890	0	27.99
3	65.878	65.795	9	43.34
4	74.374	74.251	16	55.22
5	83.997	83.850	25	70.43
6	94.397	94.279	36	89.00
7	105.347	105.226	49	110.85
8	116.851	116.728	64	136.40
9	128.444	128.378	81	164.89
10	140.090	140.006	100	196.13

A (13) egyenlet szerint a $T^2(a^2)$ összefüggésnek lineárisnak kell lennie, vagyis a megfelelő adatsorra egyenes illeszthető. Az illesztést az 5. ábra mutatja.

5. ábra. *A periódusidő négyzete a korongok távolságnégyzetének a függvényében*



Az illesztett egyenes meredeksége: $a = 1.684\ 10^4 \frac{s^2}{m^2}$ $\delta a = 0.4\%$
A tengelymetszete pedig: $b = 28.3\ s^2$ $\delta b = 1.3\%$

A (11) képletből a torziómodulusz:

$$\boxed{G = (8.5 \pm 0.4) GPa} \tag{14}$$

A torziómodulusz hibája egyszerűen adódik a K mennyiség és az illesztés meredekségének relatív hibáinak összegeként. Valójában az illesztés hibája elhanyagolható K hibája mellett. Ez a hiba főként a torziósszál sugarának méréséből adódott. (A tömegek hibáját már régebben elhanyagolhatónak vettük.)
A tengelymetszetből és a korongok tehetetlenségi nyomatékából kiszámolható az üres inga tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_u = \frac{m_1 + m_2}{a} b - \Theta_1 - \Theta_2 \tag{15}$$

Kisebb számolással:

$$\boxed{\Theta_u = (45 \pm 2)\ gm^2} \tag{16}$$

A tehetetlenségi nyomaték hibáját egyszerű hibaszámításokkal kapjuk. Figyelembe kell venni az illesztési paraméterek hibáját és a korongok tehetetlenségi nyomatékának a hibáját.

Hivatkozások

[1] Havancsák Károly: *Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban* (49-70. oldal)