Mérési jegyzőkönyv:

Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

(hétfői csoport)

Rakyta Péter

2006. március 27.

1. Bevezetés

A mérés betekintést nyújtott a szilárd testek rugalmas tulajdonságainak dinamikus vizsgálati módszerébe. Vékony téglatest alakú minták transzverzális rezgéseit vizsgáltam. Az egyik végén rögzített rudacskák szabad végén elektromágneses örvényáramokon alapuló, hangfrekvenciák tartományába eső gerjesztést használtam. A mérés a kialakuló állóhullámok frekvenciaspektrumára éleződött ki. A rezgés felharmonikusain keresztül, vizsgáltam a rezonanciatartományokat és csomópontok helyét is a gerjesztő mágnes helyzetének változtatásával. Lehetőség nyílott a mérési eredmények összehasonlítására az elméleti jóslatokkal.

2. A mérési módszerek és a használt minták

A bevezetőben röviden ismertettem a mérési elrendezést, és a gerjesztés technikáját. A részleteket a jegyzet[1] tartalmazza, ezért részletesen nem térek ki rájuk. Csak annyit említenék meg, hogy a rezgés tényleges vizsgálatához egy rezgésérzékelő detektort használtam, mely egy piezoelektromos kristályból és egy hozzá csatlakozó tűből állt. A tű hegye a rezgő rúdat érintette. A piezoelektromos kristályban a mechanikai deformációknak lineárisan megfelelő feszültség ,,keletkezik". A rezgések amplitúdóit tehát mV-okban tudtam mérni. A minták geometriai adatainak mérésére tolómérőt és csavarmikrométert, a tömeg-adatok méréséhez pedig a labor hátsó részében található digitális mérleget használtam. Az A minta adatai:

a minta hossza:	$L = 10.000 \pm 0.005\ cm$	$\delta L = 0.05\%$
szélessége:	$a = 15.60 \pm 0.005\ mm$	$\delta a = 0.03\%$
vastagsága:	$b = 2.100 \pm 0.005\ mm$	$\delta b = 2.4\%$
a bunkó vastagsága:	$h = 10.02 \pm 0.005\ mm$	$\delta h = 0.05\%$
a bunkó hossza:	$s = 2.000 \pm 0.005\ mm$	$\delta s = 0.25\%$

Az adatokból a minta térfogata: $V = 5474,45\ mm^3 \quad \delta V = 2.7\%$. Ekkor, ha a minta tömege $m = 14,65\ g$-nak adódott, akkor a sűrűsége:

$$\varrho = 2,676\ \frac{g}{cm^3} \quad \delta\varrho = 2.7\% \tag{1}$$

A sűrűség nagyobb hibája a minta vastagságának ingadozásából adódik. Több helyen megmérve ugyanis változást tapasztaltam a minta vastagságában.

A mérés során használtam még a 14-es mintát is. Hasonló módon szükségem volt ennek a mintának az adataira is:

a minta hossza:	$L = 10.05 \pm 0.005\ cm$	$\delta L = 0.05\%$
szélessége:	$a = 15.00 \pm 0.01\ mm$	$\delta a = 0.07\%$
vastagsága:	$b = 3.03 \pm 0.01\ mm$	$\delta b = 0.33\%$

A minta térfogata: $V = 4567.7\ mm^3$ $\delta V = 0.45\%$. Ekkor, ha a minta tömege $m = 40.2094\ g$-nak adódott, akkor a sűrűsége:

$$\varrho = 8.803\ \frac{g}{cm^3} \quad \delta\varrho = 0.45\% \tag{2}$$

3. Az A minta sajátfrekvenciái

A minta sajátfrekvenciáinak keresését a gerjesztő frekvencia 100Hz-étől lassú növelésével kerestem meg. A jegyzetben[1] szereplő elméleti megfontolások jó alapot nyújtottak a felharmonikusok frekvenciáinak megbecslésére.

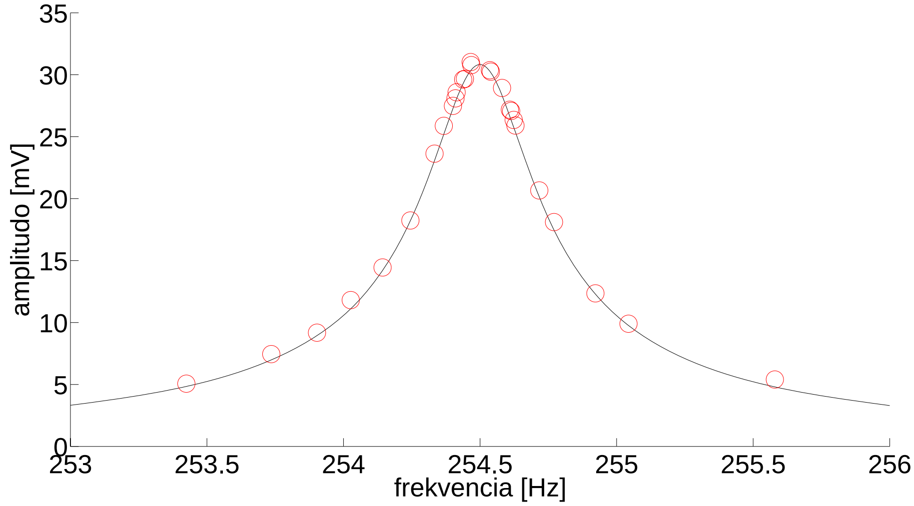
ν_{0i} $[Hz]$	i	$\frac{\nu_{0i}}{\nu_{00}}$ mért	$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)^2$ számolt	eltérés
127.30	0			
254.47	0	1	1	
802.43	1			
1604.69	1	6.305	6.267	0.6%
2257.50	2			
4515.30	2	17.758	17.548	1.1%
4402.49	3			
8799.16	3	34.581	34.386	0.6%

A táblázat harmadik oszlopában lévő adatok a kétfajta frekvenciaarány átlagával egyeznek meg. (A gerjesztést két frekvenciájú komponens alkotja, az egyik a másik kétszerese. Ezért a jelgenerátort két különböző állásba állítva ugyanazt a normálmódust tudjuk gerjeszteni.)

4. A rezonanciagörbe felvétele és elemzése

Visszaállítottam a jelgenerátort az alapmódus 254.46 Hz-es állásába. A rezonancia környékén elég nagy felosztásban kimértem a rezonancia görbéjét. Az adatokat az alábbi táblázat mutatja:

1. ábra. A rezonanciagörbe



ν $[Hz]$	A $[mV]$	ν $[Hz]$	A $[mV]$
253.42	5	254.47	30
253.74	7	254.54	30
253.90	9	254.54	30
254.03	11	254.58	28
254.14	14	254.61	27
254.24	18	254.61	27
254.33	23	254.62	26
254.37	25	254.63	25
254.40	27	254.72	20
254.41	28	254.77	18
254.41	28	254.92	12
254.44	29	255.04	9
254.44	29	255.58	5
254.47	31		

Az adathalmazra függvény illeszthető az alábbi alakkal:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\kappa^2\omega^2}} + A_{offset} \tag{3}$$

Az illesztés az 1. ábrán tekinthető meg. A számunkra érdekes illesztési paraméterek:

Félértékszélesség: $\Delta\nu = 0.38 \pm 0.05\ Hz$
Csillapítási tényező: $\kappa = \pi \cdot \Delta\nu = 1.20 \pm 0.15\ Hz$

A mérés további feladata meghatározni a vizsgált minta Young-moduluszát. Kiszámítani a rezgés elméletéből adódó

$$\nu_{i0} = \frac{k_i^2}{\pi l^2}\sqrt{\frac{EI}{\varrho q}} \qquad \Rightarrow \qquad E = \left(\frac{2\pi\nu_{i0} l^2}{k_i^2}\right)^2 \frac{\rho q}{I} \tag{4}$$

képlet segítségével lehet. Az összefüggésben $q = ab$ a minta keresztmetszete, $I = \frac{ab^3}{12}$ pedig a keresztmetszeti tényező. Foglaljuk össze egy táblázatba az eredményeket:

i	$\frac{\nu_{i0}}{k_i^2}$	E $\left[10^{10}\frac{N}{m^2}\right]$
0	72,372	6.168
1	72,830	6.245
2	73,184	6.307
3	81.199	6.237

A Young-modulusz hibáját a jegyzetben[1] leírtak alapján határoztam meg:

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\frac{\Delta\nu}{\nu} + 4\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta\varrho}{\rho}$$

A rezonanciafrekvencia meghatározásának relatív hibáját külön méréssel határoztam meg: $\nu_{01} = (254.47\ \ 254.39\ \ 254.33\ \ 254.38)\ Hz$
Ekkor a rezonanciafrekvencia meghatározásának relatív hibája:

$$\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} = 0.02\%$$

Mindebből az A minta Young-modulusza ($\delta E = 1.7\%$):

$$\boxed{E = (6.2 \pm 0.1)\ 10^{10} Pa}$$

A feladatnak része volt megmérni a csomópontok helyét is az első és a második felharmonikus esetén. A mért értékeket fontos összevetni az elméleti megfontolásokból származó értékekkel. Az adatokat az alábbi táblázat szemlélteti:

Mért érték s/L	**Számolt érték** s/L	**Eltérés** δ
Az első felharmonikus		
0.781	0.774	0.9%
A második felharmonikus		
0.854	0.868	1.6%
0.500	0.501	0.2%

Az elmélet tehát nagyon jó egyezést mutat a gyakorlattal. Az eltérések valószínűleg a gerjesztő eszköz és a detektor véges méreteiből, valamint a minta tökéletlenségéből adódik.

5. Az első felharmonikus frekvenciájának függése a rezgő hossztól

A méréshez a 14-es jelzéssel ellátott mintát használtam. A cserére azért volt szükség, mert a bunkós végű *A* minta nem volt igazán alkalmas arra, hogy változtatni tudjam a rúd rezgő hosszát. A minta adatait a jegyzőkönyv elején feltüntettem. A mérést a $3-8$ *cm*-es hossztartományban végeztem el *cm*-enként. A jegyzet[1] szerint a frekvencia és rúd L hossza között az alábbi összefüggés érvényes:

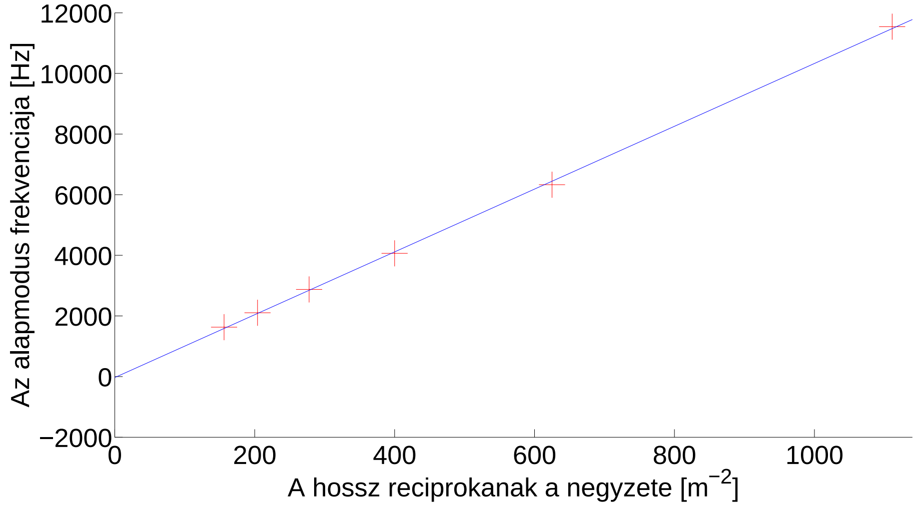
$$\nu_{i0} = \frac{1}{2\pi}\frac{k_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\varrho q}} \tag{5}$$

Az összefüggésben $q = ab$ a minta keresztmetszete, $I = \frac{ab^3}{12}$ pedig a keresztmetszeti tényező. A mért adatokat az alábbi táblázat mutatja ($i = 1$):

L [cm]	L^{-2}	ν_{11} [Hz]
8	0.0156	1629.65
7	0.0204	2106.09
6	0.0278	2874.38
5	0.0400	4065.79
4	0.0625	6330.07
3	0.1111	11541.55

Az (5) összefüggés szerint ha ábrázoljuk a frekvenciát a hossz négyzetreciprokának a függvényében, egyenest kellen ekapnunk. Az illesztést a 2. ábra mutatja.

2. ábra. Az Young-modulusz meghatározása egyenes illesztésével



Az illesztett egyenes meredeksége:

$$m = 10.36\ m^2 Hz \quad \delta m = 2.4\% \tag{6}$$

Az (5) összefüggés szerint:

$$m = \frac{k_i^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\varrho q}} \quad \Rightarrow \quad E = \left(\frac{2\pi m}{k_i^2}\right)^2 \frac{\varrho q}{I} \tag{7}$$

Elvégezve a számolásokat:

$$\boxed{E = (1.02 \pm 0.06)10^{10} Pa}$$

A Young-modulusz hibáját elemi hibaszámítási szabájokból kapjuk: Kiszámoljuk a szorzótényezőként megjelenő mennyiségek relatív hiáját és összeadjuk őket. A számolás menete elemi, de nagyon hosszú, ezért a részletezésétől most eltekintek.

Hivatkozások

[1] Havancsák Károly: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban