Mérési jegyzőkönyv:

Nehézségi gyorsulás mérése megfordítható ingával

(hétfői csoport)

Rakyta Péter

2006. március 13.

1. Bevezetés

A mérés célja megmérni a nehézségi gyorsulást megfordítható inga segítségével. A megfordítható inga egy hagyományos fizikai inga, amely két szembefordított ékre támaszkodva két egymással párhuzamos tengely körül képes lengeni. (Persze amikor az egyik éken leng, a másiknak nincs semmi szerepe.) Az inga testén található továbbá egy mozgatható súly, mellyel az inga súlypontját lehet eltolni. A mérés elve a következő: Jelöljük az ékek távolságát l_{ek}-kel. Legyen továbbá az inga redukált hossza (az ugyanolyan periódusú matematikai inga hossza) l_1 és l_2 az egyik és a másik élre támaszkodva. Ha ez a három távolság megegyezik ($l_{ek} = l_1 = l_2$) akkor az inga periódusideje mindkét ékre támaszkodva ugyanannyi (T) és megmutatható, hogy a nehézségi gyorsulást az alábbi képlet határozza meg:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_{ek}}{T^2} \tag{1}$$

Fontos, hogy megeshet az is, hogy a redukált hosszak megegyeznek, és ekkor a periódusidő is azonos a két ékre, de az ékek távolsága nem egyenlő a redukált hosszakkal. Ekkor nyilván nem használható az előbbi képlet. A redukált hosszak egyenlősége ebben az esetben annak köszönhető, hogy a súlypont az ékek között épp félúton helyezkedik el. Mi nyilván nem ezt a helyzetet keressük. A mérés során megmérjük mindkét ékre a „periódusidő - nehezék helyzet” függést és megkeressük a metszéspontokat, amikor a periódusidők megegyeznek. Eliminájuk az előbb említett esetet, amikor a redukált hosszak nem azonosak az ékek távolságával. Megmutatható, hogy ezután is két metszéspont marad, melyek mindegyike alkalmas az (1) összefüggés használatára; mindkét esetben ugyanakkora lesz a T periódusidő. (A két metszéspont onnan érezhető, hogy mivel a tehetetlenségi nyomaték a lineáris méretek négyzetével arányos, felírva bármilyen összefüggést, egy másodfokú egyenletet kapunk a nehezék helyzetét illetően.) A részletes számolások, és bizonyítások szerepelnek a jegyzetben[1] ezért erre most nem szükséges kitérnem.

2. A mérési elrendezés

A mérési elrendezés egy megfordítható ingából[1], egy lengést érzékelő műszerből és egy elektronikus időmérőből állt. Az inga testén egy centiméterskála segítségével olvasható le a nehezék helyzete. A lengésdetektor egy fényemissziós diódát és egy ezzel szemben elhelyezkedő fotodetektort tartalmazott. Az óra akkor kap egy elektronikus impulzust, amikor az inga eltakarja a fény útját. A periódusidővel kapcsolatos „félreértések” elkerülése végett, csak minden második fényzár esetében

[1] Az ablak felőli kisebb ingával mértem.

indul impulzus az óra felé. Az óra automatikus üzemmódban 10 vagy 50 periódust mér. A mérés első részében a 10-es állapotot használtam.

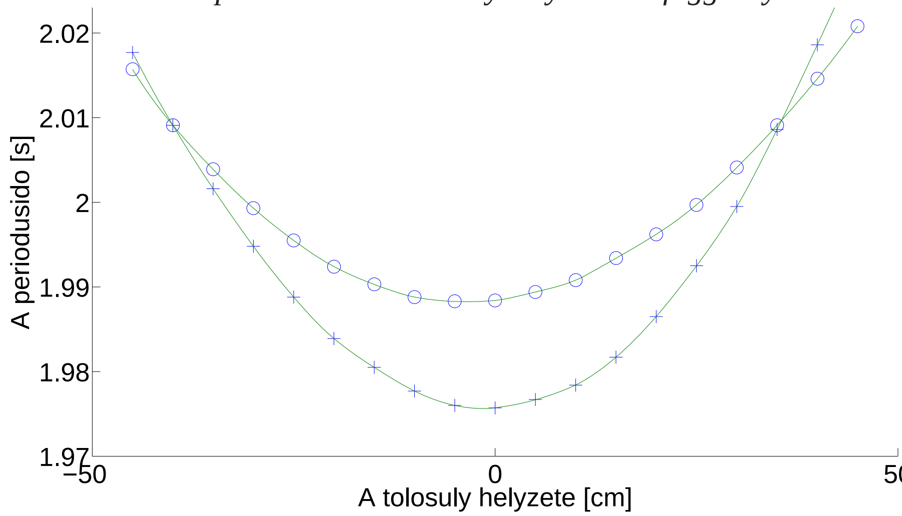
3. A mérési eredmények

A tolósúly helyzetét 5 *cm* -es lépésközönként változtattam. Az elektronikus órával 10 periódus idejét mértem minden egyes esetben. A mérési adatokat az alábbi táblázat mutatja:

A tolósúly helyzete: x [cm]	**1.ék** 10 T_1 [s]	**2.ék** 10 T_2 [s]
45	20.208	-
40	20.146	20.186
35	20.091	20.086
30	20.041	19.995
25	19.997	19.925
20	19.962	19.865
15	19.934	19.817
10	19.908	19.784
5	19.894	19.767
0	19.884	19.757
-5	19.883	19.760
-10	19.888	19.777
-15	19.903	19.805
-20	19.924	19.839
-25	19.955	19.888
-30	19.993	19.948
-35	20.039	20.016
-40	20.091	20.091
-45	20.157	20.177

Az adatsort szemléletesen az 1. ábra mutatja. Az ábrán két metszéspontot látunk. Belátható, hogy ezek a metszéspontok azok, amelyeket kerestünk, mert a hozzájuk tartozó periódusidők megegyeznek. A bevezetésben említett további metszéspont valószínűleg a méréstartományon kívül esik, ahogy ez a jegyzetben[1] is meg volt jósolva. A követjezőkben megpróbáltam minél pontosabban feltérképezni a jobb oldali metszéspontot: 3 *cm*-es környezetében 1 *cm*-es lépésekkel finomítottam a mérési adataimat. Ekkor már 50 periódust mértem, hogy a véletlen hibák minél

1. ábra. *A periódusidő a tolósúly helyzetének függvényében*



kisebb hatással mutatkozzanak meg, ha periódusidőt számolok majd az értékekből. Az mért adatokat az alábbi táblázat mutatja:

Jobb oldali metszéspont				
A tolósúly x $[cm]$	**1.ék** 50 T_1 $[s]$	**2.ék** 50 T_2 $[s]$	**1.ék** T_1 $[s]$	**2.ék** T_2 $[s]$
33	100.354	100.224	2.0071	2.0045
34	100.408	100.331	2.0082	2.0066
35	100.453	100.423	2.0091	2.0085
36	100.504	100.528	2.0101	2.0106
37	100.561	100.630	2.0112	2.0126
38	100.613	100.732	2.0123	2.0146

A kinagyított görbeszakaszokra jó közelítéssel egyenes illeszthető, ahogy ezt a 2. ábra mutatja.

A meredekebb egyenes egyenlete:

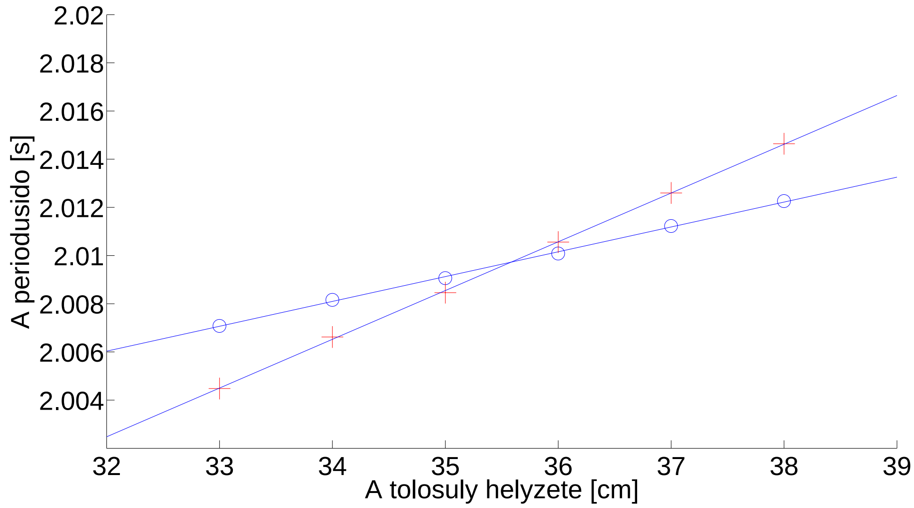
$$T = 0.002024 \frac{s}{cm} x + 1.938\ s \tag{2}$$

A laposabb egyenes egyenlete:

$$T = 0.001031 \frac{s}{cm} x + 1.973\ s \tag{3}$$

Könnyen leolvashatjuk az egyenesek metszéspontját az ábráról:

2. ábra. *A metszéspontok kinagyított környezetei.*



$$T = 2.0097\ s \tag{4}$$

Próbáljunk becslést adni a meghatározott periódusidő hibájára. A metszéspont környezetében vagyunk, ezért többször megmértem a tolósúly ugyanolyan beállítása mellett a lengésidőt és ezzel meghatároztam az értékek hozzávetőleges szórását. 50 periódusra $\Delta T_{50} = 0.01\ s$ adódott. Feltéve, hogy az 50 periódus hibái összegződtek, egy periódus hibáját $\Delta T = 0.0002\ s$-mal lehet megbecsülni, vagyis:

$$\boxed{T = (2.0097 \pm 0.0002)\ s} \tag{5}$$

Megjegyzem, hogy az illesztések során adódó paraméterek statisztikus hibája nem mérvadó (ezért nem is írtam ki a hibájukat), hiszen távol vagyunk az origótól és ezért a hibák értemetlenül felerősödnek. Igaz az illesztéseket eltolhatjuk az origó környékére (vízszintesen és függőlegesen egyaránt!!), de ekkor nagyjából ugyanakkora határozatlanságot kapunk, mint előbb. Most már csak az ékek távolságát kell tudnunk. Ez az adat meg volt adva: $l_{ek} = (1003.3 \pm 0.2)mm$. Helyettesítsük be az értékeket az (1) egyenletbe:

$$\boxed{g = (9.807 \pm 0.004)\frac{m}{s^2}} \tag{6}$$

A nehézségi gyorsulás hibája egyszerűen adódik az éktávolság relatív hibájának és a periódusidő kétszeres relatív hibájának az összegeként.

4. További elméleti megfontolások

Tudnunk kell, hogy a feladatban használt összefüggések közelítő jellegűek. Nyilván nincs értelme ezen közelítések hatásánál pontosabban megadnunk a nehézségi gyorsulást. Ezért fontos megvizsgálni, mekkora eltérést is okoznak.

- **A szögkitérés $\alpha \approx \sin\alpha$ helyettesítése során elkövetett pontatlanság.**

Az ingát átlagban 4 cm-nyit térítettem ki. Ez –ismerve az inga hosszát– nagyjából 2.6^0-os szögkitérést jelent, ami periódusidőben közelítőleg 0.012%-os eltérésben mutatkozik meg. Ezt a korrekciót le kell vonnunk a mért értékből, hiszen a triviális periódusidőformulát használtuk az összefüggésekben, ami pedig kisebb perióduidőhöz vezet, mint a korrekciókkal ellátott. A számolásokat elvégezve $g = 9.809\frac{m}{s^2}$ -t kapunk. Ez 0.02% -os eltérést jelent.

- **A levegő felhajtóerejéből származó korrekció**

A jegyzet[1] szerint az levegő felhajtóerejét közelítőleg az alábbi korrekcióval kell figyelembe venni:

$$\Delta T_{korr} = 0.8\frac{\rho_{lev}}{\rho_{inga}}T \tag{7}$$

A $\rho_{lev} = 1.259\ \frac{kg}{m^3}$ és $\rho_{inga} = 8500\ \frac{kg}{m^3}$ értékekkel számolva:

$$\Delta T_{korr} = 2.4 \cdot 10^{-4}s \tag{8}$$

Ez közelítőleg megegyezik a periódusidő bizonytalanságával. Felhasználva ezt a korrekciót $g = 9.8088\ \frac{m}{s^2}$ értéket kaptam, ami 0.02%-os eltérést jelent.
Összegezve a két korrekció hatását a nehézségi gyorsulás legvalószínűbb értéke $g = 9.811\frac{m}{s^2}$-nak adódik. Ez éppen a mért érték határára esik, vagyis a mérésünk pontatlansága ugyanakkora, mint amekkora eltérést a korrekciók okoznak.

- **A Föld forgásából származó centrifugális gyorsulás hatása**

A Föld felszínén érzékelt centrifugális gyorsulás gyengíti a gravitációs gyorsulás hatását. Mi ezen két hatás eredőjeként érzékeljük a nehézségi gyorsulást. Földrajzi elhejezkedésünket tekintve a $\varphi = 47^0$-os északi szélességi körön vagyunk. A Föld forgási szögsebessége $\Omega = \frac{2\pi}{1\ nap}$, sugara pedig közelítőleg $R = 6370\ \ km$. Felhasználva ezeket az adatokat a centrifugális gyorsulás (felszínre merőleges) hatását az alábbi összefüggéssel lehet megbecsülni:

$$\Delta g = \Omega^2 R\cos^2\varphi \tag{9}$$

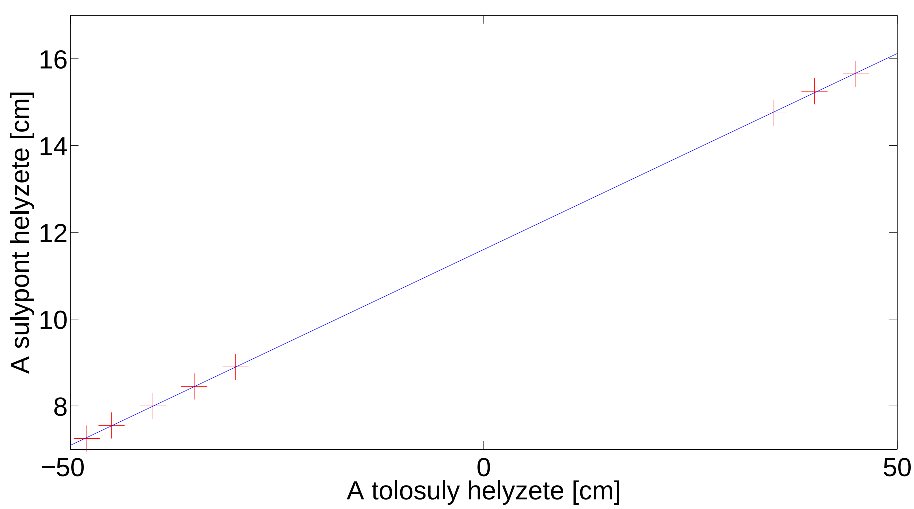
Számszerűen: $\Delta g = 0.016\frac{m}{s^2}$. Ez kb. 0.16%-os módisítást jelent. Az előzőekben számolt korrekciókhoz képest elég elég nagynak számít.

5. A súlypont mérése

A súlypont helyzetét nagyon egyszerű elv alapján mértem meg: Addig tologattam az ingát egy háromszög alapú hasáb egyik csúcsán, amíg úgy nem éreztem, hogy nincs egyensúlyban. A tolósúly több helyzetére végeztem mérést. Az egyensúlyhoz tartozó alátámasztási pontok helyét az inga testén lévő beosztásról olvastam le. Az eredményeket az alábbi táblázat mutatja:

A tolósúly helyzete: x $[cm]$	**A súlypont helyzete:** s $[cm]$
-48	7.25
-45	7.55
-40	8.00
-35	8.45
-30	8.90
35	14.75
40	15.25
45	15.65

3. ábra. *A metszéspontok kinagyított környezetei.*



A mért pontok az elvárás szerint közel egy egyenesre esnek, ahogy azt a 3. ábra is jól mutatja. A mérési tartomány közepén nem tudtam mérni, mert a tolósúly alakja megakadályozott volna az egyensúlyozásban. A pontsorra illesztett egyenes egyenlete: (s a súlypont helyzete, x a tolósúlí helyzete)

$$s = 0.0903x + 11.61\ cm \tag{10}$$

A nehézségi gyorsulás mérése során a súlypont helyzete kis skálán változott csak. A két éket összekötő szakasz felezőpontjára például csak úgy kerülhetett volna, ha a tolúsúlyt $x = -128\ cm$-re toltam volna ki. Ez jelentette volna a triviális metszéspontot, amelyről a bevezetőben írtam. A mérési tartományban viszont nem csoda, hogy elkerültem. További érdekesség lehet az az eset, amikor a súlypont valamelyik ék alá kerül. Ekkor a periódusidő végtelenné válik. Mindkét ék az inga testén lévő skála szerint $\pm 51\ cm$ távolságban volt az origóhoz képest. Ahhoz, hogy a súlypont ide kerüljön, a tolósúlyt $x = 436\ cm$ és $x = -693\ cm$ távolságokba kellett volna kitolni. Ezek meglepően nagy távolságok. A mérés során nagy extrapolációs tartományokat jártam be, ezért a számolt értékeket csupán informatív jellegűnek tekintem.

Hivatkozások

[1] Havancsák Károly: *Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban* (35-48. oldal)