

Tudományos Diákköri Dolgozat

Elektronfókuszálás szupravezető jelenlétében



Rakya Péter

ELTE, TTK Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
Budapest, 2006. október

Témavezető:
Cserti József

Előszó

Az utóbbi években mind kísérleti, mind elméleti szempontból jelentősen megnövekedett az érdeklődés az ún. mezoszkopikus rendszerek iránt. E területen történt fejlemények egy kitűnő összefoglalója C. W. Beenakker és H. van Houten [1], S. Datta [2], valamint T. Heinzel [3] könyveiben található. A mai félvezetőiparban már sikeresen elő tudnak állítani néhány 100 nm méretű mintákat, melyekben az elektronok transzporttulajdonságai vizsgálhatók. Az elektronok mozgását előre megtervezhető módon lehet korlátozni olyan kis méretű tartományokra, melyekben a mozgás kvantumos jellege alapvető szerepet kap. Az ilyen szerkezetek előállításí módját az irodalomban „nanotechnológiának”, az így készült eszközöket „nanoszerkezeteknek” nevezik. A technikai fejlődés révén ma már viszonylag egyszerű módon lehet létrehozni olyan tartományokat, melyekben az elektronok mozgását gyakorlatilag *két dimenzióra* lehet korlátozni. Összeillesztve GaAs és AlGaAs félvezető réteget, a határfelületen egy kétdimenziós tartomány alakul ki. Az elektronok mozgása a határfelületre merőleges irányban gyakorlatilag elhanyagolható a határfelületnél kialakult potenciál völgy következtében. Ugyanakkor az elektronok mozgása a határfelület mentén szabadnak tekinthető. GaAs/AlGaAs félvezető heteroszerkezetben az elektronokat szabadelektronként kezelhetjük, melyeknek effektív tömege kb. $0.067m_e$. A kis effektív tömeg miatt az elektronoknak nagy a mozgékonyasága. Így egy kölcsönhatásmentes kétdimenziós elektrongáz hozhatunk létre. Az ilyen rendszerek transzporttulajdonságait jól vizsgálhatjuk kísérletileg és (jelentősen egyszerűbb körülmények mellett) elméleteileg is.

Ismeretes, hogy kétdimenziós elektrongázban az állapotsűrűség állandó, melyet a Fermi energia rögzít. Az elektronok n_s sűrűsége a határfelületen arányos a Fermi energiával $n_s \sim E_F \sim k_F^2 \sim 1/\lambda_F^2$, ahol λ_F a Fermi hullámhossz. GaAs/AlGaAs heteroszerkezetben a normál fémekbeli értékhez képest sokkal kisebb, tipikusan $n_s \sim 3 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{cm}^2}$. Fémekben a Fermi energia $E_F \sim 1 \text{ eV}$ és $\lambda_F \sim 1 \text{ \AA}$, míg GaAs/AlGaAs-ben $E_F \sim 14 \text{ meV}$ és $\lambda_F \sim 400 \text{ \AA}$. Az elektronok mozgásának fontos paramétere az l szabadúthossz. Fémekben $l \gg \lambda_F$, és hasonlóan viszonylag tiszta, nem szennyezett GaAs/AlGaAs-ben is $l \sim 100 - 10000 \text{ nm}$, azaz $l \gg \lambda_F$.

Ha negatívan töltött kapuelektrodákat helyezünk a heteroszerkezet tetejére, akkor az elektronok mozgását tovább korlátozhatjuk a kétdimenziós tartományban. Így elérhető, hogy az elektronokat egy szűk csatornába tereljük. A csatorna szélessége a technológiafejlődés következtében már néhány 100nm-re csökkenthető. Legyen a csatorna szélessége H , a hossza pedig W . Vizsgálódásainkat arra az esetre korlátozzuk, amikor $H \ll W \ll l$. Ekkor az elektronok mozgása *ballisztikusnak* tekinthető egy „végtelen” hosszú szalag alakú elektrongázban. Az utóbbi esetben az elektronok szabad mozgását csak a csatorna határvonalai mentén kapuelektrodákkal kialakított falak befolyásolják. Az elektron kvantumos viselkedésének szemiklasszikus közelítésében az elektronok klasszikus pályáiról beszélhetünk. A falakról az elektron tökéletesen rugalmas módon visszapattan, és így jól nyomon követhető a pályája.

Ebben a dolgozatban fő célunk a szalag geometriájú, egyik határvonala mentén szupravezető anyaggal határolt elektrongáz vizsgálata volt. A szupravezető hatása abban nyilvánul meg, hogy az elektronállapotok mellett lyukszerű állapotok is szerves részét képezik a rendszernek. Szemiklasszikus szemléletben ugyanis a szupravezető határfelületére érkező elektron lyukként pattan vissza a bejövő elektron mozgásával ellentétes irányban. Ezt a jelenséget nevezzük *Andreev-reflexiónak*. A rendszer állapotának leírása az elektronszerű és lyukszerű állapotok egyidejű megadásával lehetséges. A hagyományos egyelektronos leírással ellentétben tehát az ún. *Bogoliubov de Gennes -spinorokat* használjuk majd. A kialakított rendszer vezetési tulajdonságait

az elektrongáz síkjára merőleges, homogén mágneses mező függvényében írjuk le. Klasszikusan a mágneses tér a kvázirészecskék pályáinak körív alakú meggörbülését eredményezi. A dolgozat megírását a [4],[6],[7] cikkek ösztönözték. A kutatás eredményeinek felhasználásával jelenleg folyamatban van egy tudományos cikk írása.

Köszönetnyilvánítás

Nem fejezhetem be az előszót anélkül, hogy köszönetet ne mondanék témavezetőmnek, *Cserti Józsefnek* az érdekes téma felvetésért és a kutatás közben nyújtott sokoldalú segítségért, tanácsokért. A dolgozat írását ugyancsak előrelendítették Kaufmann Zoltánnal és Kormányos Andorral folytatott konzultációink. Értékes hozzászólásaikért ezúton is szeretnék köszönetet mondani. Hálás vagyok *Gáspár Merse Előd* doktorandusznak \LaTeX -ben nyújtott tanácsaiért, valamint *Mezei Márk* fizikus hallgatónak, hogy felhívta figyelmemet a kézirat apró hibáira. Köszönetemet szeretném kifejezni szüleimnek is: *Rakya Gabriellának* és *Rakya Vladimírnek*, akik e dolgozat megírása közben emberi és erkölcsi támogatást nyújtottak. Végül, de nem utolsó sorban köszönöm az *ELTE TTK, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszéknek* a rendelkezésemre bocsátott számítástechnikai lehetőségeket, amelyek segítségével munkámat színvonalasabban végezhettem.

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| Előszó | iii |
| Köszönetnyilvánítás | iv |
| 1. Bevezetés | 1 |
| 1.1. A kétdimenziós elektrongáz | 1 |
| 1.2. Vázlatos kísérleti elrendezés | 2 |
| 1.3. Klasszikus eredmények | 3 |
| 1.4. Az Andreev-reflexió | 4 |
| 1.5. Az Andreev-reflexió kvantummechanikája | 5 |
| 1.6. A módosított rendszer | 6 |
| 1.7. A klasszikus eredmények összehasonlítása | 7 |
| 1.8. Általában a kausztikákról | 8 |
| 2. A rendszer kvantummechanikája | 11 |
| 2.1. A Bogoliubov de Gennes-egyenlet | 11 |
| 2.2. A hullámfüggvények | 12 |
| 2.3. Az energiaspektrum szemiklasszikus közelítésben | 14 |
| 2.4. A kirajzolt hullámfüggvények | 19 |
| 2.5. Konduktancia | 20 |
| 2.6. Összefoglalás | 25 |
| Függelék | 26 |
| Függelék A - A hullámfüggvény | 29 |
| A.1. Hullámfüggvény a hagyományos hullámvezetőben | 29 |
| A.2. Hullámfüggvény a szupravezetőben | 33 |
| A.3. A hullámfüggvények illesztése a határfelületen | 35 |
| Függelék B - Energiaspektrum | 36 |
| B.1. Andreev-fázistolás | 37 |
| B.2. Bohr-Sommerfeld -féle kvantálási feltételek | 40 |
| Függelék C - Konduktancia | 46 |
| C.1. A hullámfüggvény közelítő meghatározása pályák interferenciájával | 47 |
| C.2. Módusok összegzése | 49 |

| | |
|---|-----------|
| C.3. A lyukak járuléka | 51 |
| C.4. A pontkontaktus vezetőképessége | 51 |
| C.5. Klasszikus átmenet | 52 |
| Függelék D - Kausztika | 52 |
| D.1. Kausztika abban az esetben, amikor a lyuk csak a szupravezető felszínén ütközik | 53 |
| D.2. Kausztika abban az esetben, amikor a lyuk ütközik a hullámvezetőt határoló potenciálfal felületén is | 57 |
| Irodalomjegyzék | 60 |

1. fejezet

Bevezetés

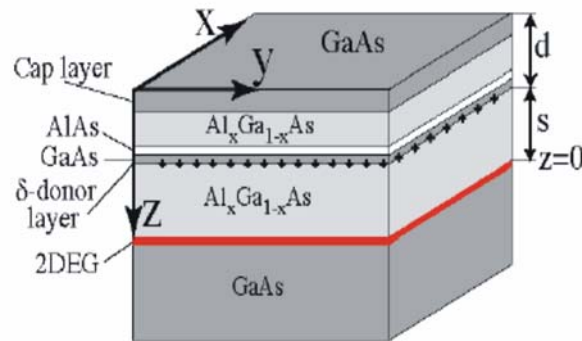
Ebben a fejezetben részletesen bemutatjuk a kétdimenziós elektrongáz ballisztikus elektronjainak mozgását, tulajdonságait. A megszerzett ismeretek alapjául szolgálnak majd későbbi vizsgálatainknak. Az elektrongázt egyik oldaláról szupravezetővel határoljuk, és a rendszert homogén mágneses mezőbe helyezzük. A szupravezető alapjaiban fogja megváltoztatni a rendszer viselkedését. A változást az ún. Andreev-reflexió során keletkező lyukak jelenléte fogja jelenteni.

Egyes anyagok vezetési sávjában lévő elektronok mozgása nagyban hasonlít a vákuumban megfigyelhető részecskékéhez. Az anyagban lévő elektronok természetesen érzik az anyag atomos szerkezetét, ezért az előző kijelentésünk csak abban az esetben érvényes, ha a vizsgált hosszskála sokkal kisebb, mint az elektronok átlagos szabad úthossza. A kritériumnak eleget tevő elektronok mozgását nevezzük *ballisztikus mozgásnak*, és az elektronokat *ballisztikus elektronoknak*. A közvetítő közeg atomos szerkezetének azonban van még egy nagyon fontos következménye. Tudjuk, hogy vákuumban lévő szabad elektronok energiáját az $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$ formula adja meg. Az $E(k)$ függvényt tekintve egy parabolát látunk. A kvantumos számolások azt mutatják, hogy a közegben is hasonló alakú függvény írja le a ballisztikus elektronok energiáját, de a szabad részecske analógiája szerint most egy effektív tömeget rendelhetünk az elektronhoz. Az ilyen és ehhez hasonló effektív tulajdonságokkal ellátott részecskéket az irodalomban *kvázirészecskéknek* nevezzük [5].

A továbbiakban olyan rendszerekkel foglalkozunk, melyek az abszolút zérus hőmérséklet környékére vannak hűtve. A gyakorlatban ez néhány 100 mK-t, esetleg néhány K-es hőmérsékletet jelent. Ekkor az anyag elektronszerkezete jól megkülönböztethető diszkrét energiaszintekből áll. Az energiaszintek a Pauli-elv miatt a legalacsonyabb szintől kezdve a magasabbakig telítődnek. A legmagasabb szintet nevezzük *Fermi-energiának*. Ez az energiaszint jól definiált, és az elektronok számától függ. A ballisztikus elektronoknak a vezetési sávban jó közelítéssel ekkora energiájuk van.

1.1. A kétdimenziós elektrongáz

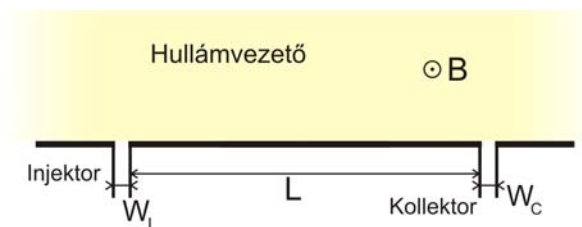
Az eddigiekben elektronszerkezetről, vezetési sávban lévő elektronokról és atomos szerkezetről beszéltünk. A leírás tökéletesen ráillik fémes anyagokra. Mi mégsem fémekkel fogunk



1.1. ábra. A kétdimenziós elektrongáz (2DEG)

foglalkozni. Az ok egyszerű. A fémeket napjainkig már nagyon alapos kutatásoknak vetették alá. Ráadásul a fémek tulajdonságaikat tekintve nem is felelnének meg célkitűzéseinknek, hiszen az elektronok mozgása fémekben nem ballisztikus. A fémekre jellemző Fermi-hullámhossz viszonylag kicsi (tipikusan 0.5 nm körüli), ezért a folyamatok gyakorlatilag klasszikus úton is kezelhetők. Ha teret szeretnénk hagyni a kvantummechanikának is, nagyobb hullámhosszú elektronokra lesz szükségünk. Céljainknak tökéletesen megfelelnek az ún. elektrongázok. Az elnevezés ne legyen félrevezető, nem vákuumban lévő elektronokról van szó. Képzeljünk el két különböző félvezetőt, melyeket tartósan összeillesztünk (1.1. ábra). A különböző elektronsűrűség és Fermi-energiaszintek miatt az érintkezési felületen elektrontöbblet alakul ki. A nagyobb energiaszintből ugyanis a vezetési elektronok igyekeznek átjutni a kisebb energiaszintű anyagba, amíg a kialakult elektrosztatikus tér ezt meg nem gátolja. Ezzel az érintkezési síkban megfelelő hosszskálán kétdimenziósnak tekinthető, az érintkezési síkkal párhuzamos elektrongáz alakul ki (2DEG). Az elektronok mozgása a határfelületre merőleges irányban korlátozott, mert ehhez jóval nagyobb gerjesztési energia szükséges, mint amit az alacsony hőmérsékletű környezetből felvehetne. Többek között használatos még a hullámvezető elnevezés is, mivel az elektrongázban az elektronok szabadon terjedhetnek, hullámokat közvetíthetnek, ill. az állapotaik is hullámfüggvényekkel írhatók le. A dolgozat során az ilyen kétdimenziós, szupravezető anyaggal határolt rendszereket vizsgáljuk.

1.2. Vázlatos kísérleti elrendezés



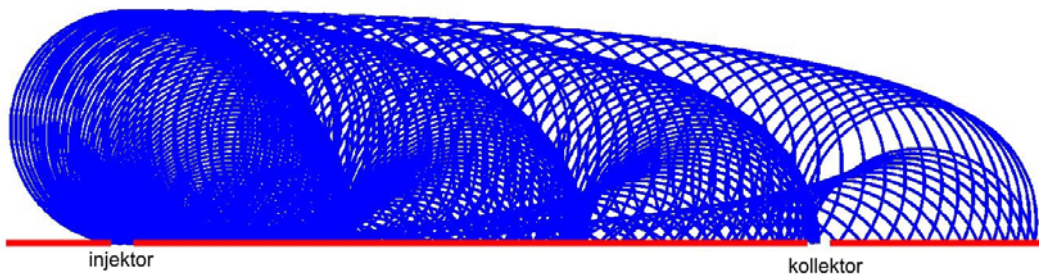
1.2. ábra. A vázlatos kísérleti elrendezés

A hullámvezetőben potenciálgátak segítségével „falakat” tudunk kialakítani, melyekről az

elektronok rugalmasan visszapattannak. Ilyen potenciálokat a felületre merőleges irányú, külső elektromos térrel hozhatunk létre [6]. Vizsgáljunk meg egy egyszerű esetet szupravezető alkalmazása nélkül. Képzeljünk el egy végtelen hosszú potenciálgátat, mely egy végtelen fűlsíkot határol. A „végtelen” jellemzőt természetesen nem szabad szó szerint értelmezni: a vizsgált minta méretei nem lehetnek nagyobbak az elektronok átlagos szabad úthosszánál, ami a gyakorlatban GaAs félvezetőkben $l_e \sim 9 \mu\text{m}$. A kétdimenziós hullámvezetőhöz áramvezetés céljából kontaktusokat (injektort és kollektort) is csatolunk (1.2. ábra). Rendszerünket a hullámvezető síkjára merőleges homogén mágneses mezőbe helyezzük. Az injektoron keresztül állandó áramot vezetünk be az elektrongázba, majd azt vizsgáljuk, hogy a kollektoron keresztül mennyit tudunk ebből kivezetni. Szemléletesen a bevezetett áram olyan, mintha Fermi-energiájú elektronokat lőnénk be egy kis nyíláson. Az átvezetett áram természetesen a mágneses mező függvénye lesz. Ilyen elrendezést kísérletileg már megvalósítottak, és az elméleti számolások jól egyeztek a mérési eredményekkel [6].

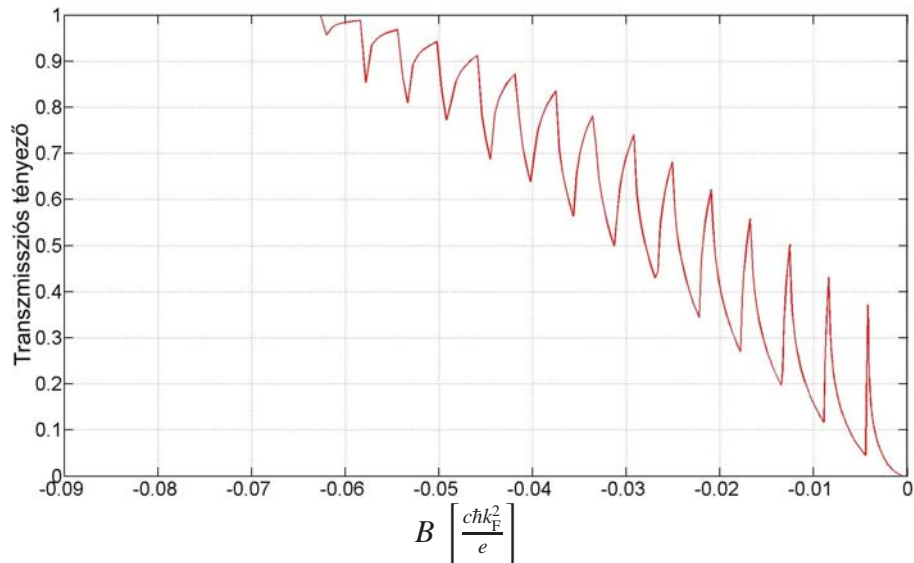
1.3. Klasszikus eredmények

Tanulmányozzunk olyan belövőnyílásokat, melyek nagysága a részecskék hullámhosszának nagyságrendjével esik egybe. Ekkor az elektronok sebességének a nyílás keresztmetszetébe eső vetülete eléggé határozatlan, első közelítésben egyenletes eloszlást mutat $[-v_F; v_F]$ határokkal. Ennek közvetlen következménye, hogy az α szög alatt belőtt elektronok $I(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{2} I_0$ áramot képviselnek. A belövési szöget a nyílás normálisától mérjük. Az összefüggésben I_0 a beinjektált áram, hiszen $I_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(\alpha) d\alpha$, ami az árammegmaradást fejezi ki. A belövések után az elektronok a mágneses tér miatt körpályán mozognak, a potenciálfalról pedig feltevéseink szerint rugalmasan visszaverődnek. Kis hőmérsékletek esetén ez a gyakorlatban is nagyon jó közelítésnek bizonyul [6]. Vigyáznunk kell arra is, hogy a rendszerre kapcsolt mágneses mező ne legyen túlságosan nagy, nehogy az elektronok mozgását tekintve megjelenjenek egyéb kvantumos jelenségek is, mint pl. a kvantumos Hall-effektus.



1.3. ábra. A különböző szög alatt belőtt elektronok pályái

Hagyományos klasszikus esetben az 1.3. ábra szemlélteti az elektronok mozgását. Egy egyszerű programmal választ kaphatunk arra, hogy az injektált elektronok hányadát tudjuk kivezetni a kollektoron. Az 1.4. ábra ezt a transzmissziós tényezőt mutatja a mágneses tér függvényében. Az ábrán csúcsok szabályszerű ismétlődése látható. Könnyen utánajárhatunk, hogy a csúcsok azoknál a mágneses tér értékeknél lépnek fel, melyek a kollektorba fókuszálják a merőlegesen



1.4. ábra. Az elektronok transzmissziós tényezője a mágneses tér függvényében. Az ábra adatai: $W_I k_F = 0$; $W_C k_F = 30$; $L k_F = 450$; amennyiben W a kollektor vastagsága, L az injektor és kollektor legközelebbi pontjainak távolsága, k_F pedig a ballisztikus elektronok Fermi-hullámszáma.

belőtt elektronokat. Az első csúcs ahhoz az esethez tartozik, amikor a fókuszált elektronok egyszer sem ütköznek a hullámvezető falával. Ekkor a ciklotronpálya átmérője megegyezik a ki- és bevezetések távolságával (L). A többi csúcs ezen mágneses mező egész számú többszöröseinél fog megjelenni, azaz a rendszer a mágneses mezők

$$B = n \frac{2c\hbar k_F}{eL} \quad n \in \mathbb{N}$$

értékeire fogja az elektronokat a kollektorba fókuszálni. Ezzel a rendszerrel a továbbiakban nem foglalkozunk. A témakör klasszikus és kvantummechanikai szempontból egyaránt [6]-ban van részletesen feldolgozva. Az eddigi eredményeket is csak azért közöltük, hogy összehasonlíthassuk a módosított rendszerrel, mellyel ebben a dolgozatban foglalkozunk majd. Említettük, hogy a módosítást szupravezető anyag jelenléte fogja jelenteni. Ahhoz, hogy továbbhaladhassunk és megértsük, miért is olyan jelentős a szupravezető jelenléte, meg kell ismerkednünk egy nagyon érdekes jelenséggel, az ún. Andreev-reflexióval.

1.4. Az Andreev-reflexió

Képzeljünk el egy határfelületet, melyen elektrongáz érintkezik szupravezetővel. A mágneses tér jelenlététől egyelőre eltekintünk. Kövessük egy ballisztikus elektron mozgását a hullámvezetőben, mely a szupravezető felé tart. Amikor eléri a határfelületet, egy furcsa dolog történik: a beérkező elektron egy Cooper-pár egyik tagjaként a szupravezetőben továbbhalad, viszont a hullámvezetőben elektronhiány lesz a Cooper-pár másik elektronja miatt. Ez a hiány pozitív töltéshordozóban, egy lyukban nyilvánul meg, melynek mozgása éppen ellentétes lesz a beérkező elektron mozgásával. A jelenetet az 1.5. ábra mutatja. A jelenséget klasszikusan és kvantummechanikai szempontból egyaránt megtudjuk magyarázni. A lyuk mozgása vele ellentétesen



1.5. ábra. Andreev-reflexió. A szupravezető-felületre érkező elektron lyukként verődik vissza ellentétes irányban.

haladó elektronokkal valósul meg. A mozgásban a lendületet nyilván az elektronok szállítják, ezért eredendően az impulzus áramlása a lyuk mozgásával ellentétes. Mivel klasszikusan az impulzus a tömeg és a sebesség szorzata, mozgással ellentétes impulzust csakis úgy kaphatunk, ha a lyuk effektív tömege negatív lesz. Ez részben megmagyarázza azt is, hogy az elektron lyukszerű visszaverődése miért nem engedelmeskedik a klasszikus visszaverődés törvényeinek: a határfelülettel párhuzamos impulzuskomponens így lehet mozgásálló. Az elmondottak során hallgatólagosan feltételeztük azt is, hogy a lyuk és elektron effektív tömege előjeltől eltekintve azonos. A kvantummechanika egzaktul is alátámasztja klasszikus interpretációinkat, és mellékesen fényt derít az Andreev-reflexió szükséges feltételeire is.

1.5. Az Andreev-reflexió kvantummechanikája

Ha egy normál fémhez szupravezetőt csatolunk, a Fermi-energiáknak a két tartományban azonosnak kell lenniük. A szupravezető oldalon az elektronok alapállapotban kötött párokban, ún. *Cooper-párokbán* vannak jelen. Így a hullámvezető oldalon *két* elektronnak és a szupravezető oldalon egy Cooper-párnak a kémiai potenciálja lesz azonos. Legyen a kötött Cooper-pár energiájának a fele Δ , azaz a kötési energia egy elektronnra vonatkoztatva. Tegyük fel, hogy a hullámvezető oldalról egy elektron érkezik a határfelületre, melynek energiája kisebb a Δ energiánál. Az elektronnak nincs partnere, mellyel Cooper-párt alkothatna a szupravezető oldalon, hiszen energiája kisebb a Cooper-pár létrejöttéhez szükségesnél. Az elektronnak vissza kell reflektálódni a határról. Ez a reflexió meglehetősen különös módon megy végbe. A jobb megértés érdekében célszerű kvázirészecske képben gondolkodni. Tegyük fel, hogy a határfelületen Δ értéke zérusról (a hullámvezető oldalnak megfelelően) növekszik az egyensúlyi értékhez a szupravezetőben egy $\xi_c \sim \hbar v_F / \Delta$ koherenciahossz [8] méretű távolságon belül. A kvázirészecske spektruma a szupravezetőben a későbbiekben megismert (2.1) Bogoliubov de Gennes egyenlet szerint:

$$E(\mathbf{k}) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - E_F\right)^2 + \Delta^2}. \quad (1.1)$$

A kvázirészecskék csoportsebességét pedig a

$$\mathbf{v}_{cs} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (1.2)$$

kifejezés adja. A hullámvezető oldalon $\Delta = 0$ és a diszperziós reláció a $k_F = \sqrt{2mE_F}/\hbar$ Fermi-hullámszám környezetében az (1.1) egyenletből: $E(\mathbf{k}) = \left| \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - E_F \right|$ alakú. Ha $k < k_F$, akkor a kvázirészecske csoportsebessége negatív lesz (\mathbf{k} -val ellentétes irányú). Ezeket a kvázirészecskéket lyukszerű állapotoknak nevezik. Az $E(\mathbf{k})$ diszperziós görbén ezekre az állapotokra a meredekség negatív. Az $E(\mathbf{k})$ diszperzióknak ezt a részét lyukszerű ágnak nevezik. Az elektronszerű ágon a kvázirészecske sebessége pozitív, az állapot elektronszerű. A határfelületre érkező Δ -nál kisebb energiájú \mathbf{k} állapotú elektronszerű kvázirészecske visszareflektálódik a határfelületről. Ilyen reflexió során az energia megmarad. Megbecsülhetjük a $\delta p = \hbar \delta k$ kváziimpulzus változást a reflexió során. A δp változás nagyságrendileg egyenlő a dp/dt és annak a δt időnek a szorzatával, ami alatt a részecske a határfelületi tartományon áthalad, azaz $\delta t \sim \xi/v_F$. Ugyanakkor dp/dt egyenlő a részecskére ható erővel, azaz $-dV/dx \sim \Delta/\xi$ értékkel. Így

$$\delta k \sim \frac{1}{\hbar} \frac{\xi}{v_F} \frac{\Delta}{\xi} = \frac{\Delta}{\hbar v_F} = k_F \frac{\Delta}{2E_F} \ll k_F. \quad (1.3)$$

Az utóbbi egyenlőtlenség abból következik, hogy szupravezetőkben $\Delta/E_F \ll 1$, tipikusan kisebb 0.01-nél. Ez azt jelenti, hogy a kvázirészecske impulzusának változása sokkal kisebb magánál a kváziimpulzusnál. De a reflexió után az elektronnak visszafelé kell haladnia. Ezt a két feltételt csak egy módon lehet teljesíteni, nevezetesen ha a „részecske” átalakul „antirészecskévé”, a hullámvezető oldalról bejövő elektronszerű kvázirészecske átmegy lyukszerű állapotba, gerjesztésbe. Az energia és a kváziimpulzus megmarad. Azonban a kvázirészecske \mathbf{v}_{ref} sebessége a bejövő kvázirészecske \mathbf{v}_{inc} sebességével ellentétes irányú lesz a reflexió után:

$$\mathbf{v}_{ref} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{|\mathbf{v}_{inc}| \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = -\mathbf{v}_{inc}. \quad (1.4)$$

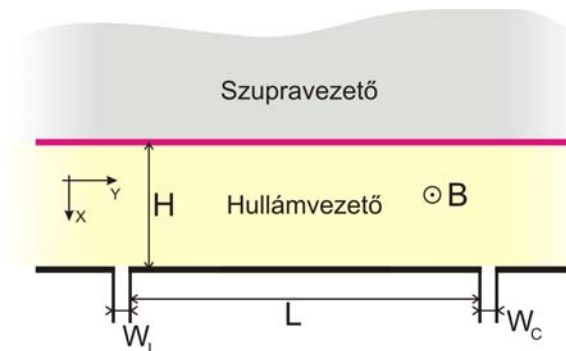
Az ilyen reflexió alapvetően eltér a normál reflexiótól, ahol csak a sebesség normál komponense vált előjelet. Ezt a speciális reflexiót nevezzük *Andreev-reflexiónak*. A normál oldalról érkező $E_F + E$ energiájú és \mathbf{k} állapotú elektron „felszed” egy másik $-\mathbf{k}$ állapotú (ellentétes impulzusú) és $E_F - E$ energiájú elektront és így Cooper-párt alkotva bemennek a szupravezetőbe. Visszamarad egy „antirészecske”, melynek impulzusa ellentétes a felszedett elektron impulzusával, azaz azonos irányú az eredetileg bejövő elektron impulzusával.

A fordított folyamat is megvalósulhat. Ha egy lyukszerű kvázirészecske érkezik a határfelületre, akkor egy elektronszerű kvázirészecske reflektálódik vissza a bejövő részecske sebességével ellentétes irányban.

1.6. A módosított rendszer

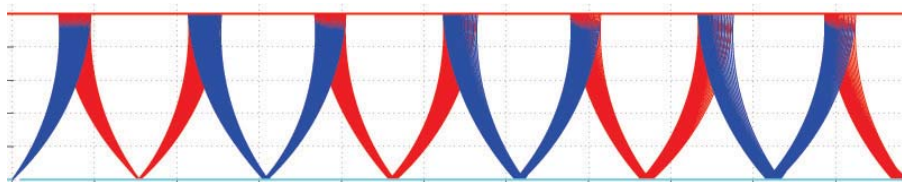
Miután tisztáztuk a szupravezető hatását, valóban jogosnak látszik azon kijelentésünk, hogy a szupravezető alapjaiban változtatja meg rendszerünk viselkedését. Az 1.2 és 1.3 alfejezetekben bemutatott rendszert úgy változtatjuk meg, hogy a már meglévő potenciálfallal párhuzamosan

létrehozzuk a szupravezető-határfelületet. A hullámvezetőnek így véges vastagsága lesz, melyet a dolgozatban H -val fogunk jelölni. Az elrendezést az 1.6. ábra szemlélteti. Mivel a lyukaknak



1.6. ábra. A módosított rendszer. A továbbiakban ezt az elrendezést fogjuk vizsgálni.

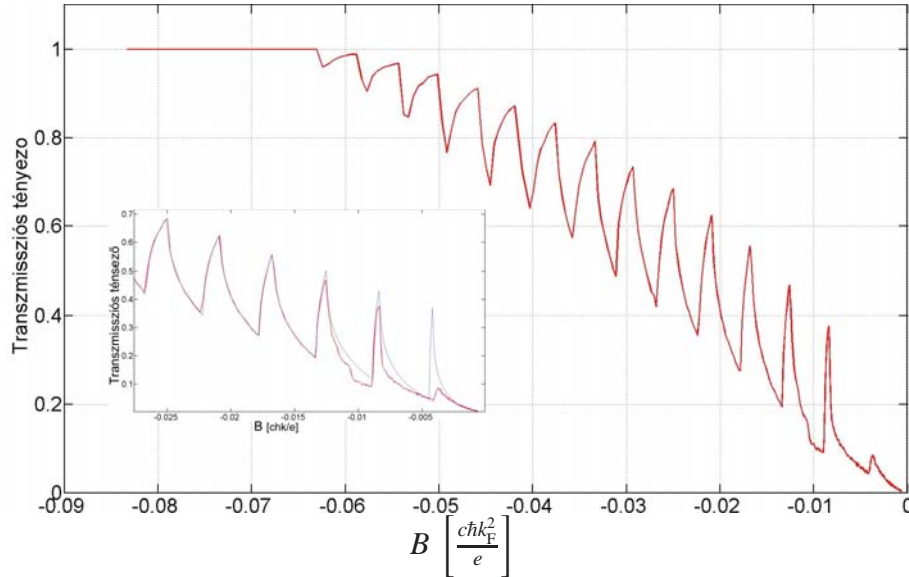
negatív az effektív tömege, az elektronoknak viszont a töltése negatív, a töltéshordozók pályái heliocitástartóak lesznek, vagyis „ugyanarra görbülnek”, ahogy azt az 1.7. ábra is mutatja. A legfontosabbakat ezzel tisztáztuk. Az érdekesség kedvéért a szupravezetővel módosított rendszerrel elvégezzük ugyanazokat a számítógépes szimulációkat, melyeket a szupravezető nélküli elrendezés bemutatásakor is megtettünk az 1.3 alfejezetben.



1.7. ábra. Kis szögterületben belüli elektronok és lyukak pályái a hullámvezetőben. Pirossal a lyukak pályái, kézzel az elektronok pályái vannak jelölve.

1.7. A klasszikus eredmények összehasonlítása

Összehasonlított rendszereink a programok szempontjából kizárólag a szupravezető jelenlétében különböznek egymástól: ugyanolyan nagyságúak a belövönnyílások, a Fermi-energiák és a pontkontaktusok távolsága is megegyezik. A kollektor helyén kivonjuk egymásból az elektronok és a lyukak számát. Ez a töltések egyfajta effektív transzmissziós tényezőjéhez fog vezetni. Az új rendszerben a mágneses tér mindkét lehetséges iránya esetén kerülhetnek töltések a kollektorba. Az 1.8. ábra az 1.2 alfejezettel megegyező konfigurációt mutatja. Ebben az esetben a mágneses mező negatív irányú. Látható, hogy az 1.4. és 1.8. ábrákban kizárólag az első három csúcsban mutatkozik különbség. Ha utánaszámolunk, a különbség éppen addig tart, amíg a belüli elektronok el tudják érni a szupravezető felszínét. A mágneses mező negatív irányítása tehát nem rejt túlzottan nagy lehetőségeket. Annál inkább a pozitívan irányított mágneses mező! Az 1.9. ábrán láthatjuk, hogy a transzmissziós tényező egyaránt felvesz pozitív



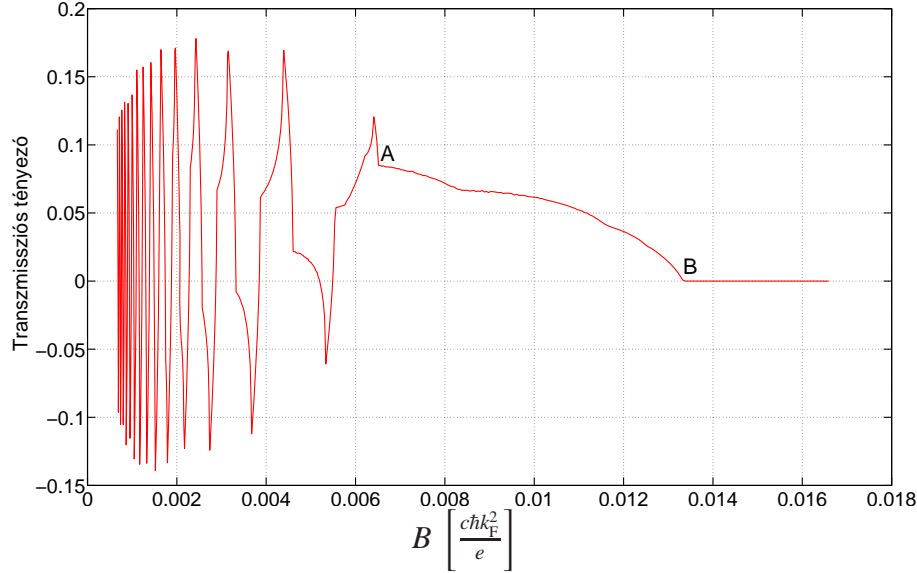
1.8. ábra. Az elektronok transzmissziós tényezője a mágneses tér függvényében. Az ábra adatai: $W_I k_F = 30$; $W_C k_F = 30$; $L k_F = 450$; $H k_F = 150$ amennyiben W a kollektor vastagsága, L az injektor és kollektor legközelebbi pontjainak távolsága, H a hullámvezető vastagsága, k_F pedig a ballisztikus elektronok Fermi-hullámszáma.

és negatív értékeket. Az egyes csúcsok az elektronok és lyukak fókuszálását jelentik a kollektorba. Fókuszáló jelleggel leginkább azok a pályák rendelkeznek, melyek közel merőlegesen ütköznek a szupravezetővel. Ezt szemlélteti az 1.7. ábra is. A más szög alatt belőtt elektronok mozgása erősen széttartó. Ezt a Függelék D fejezetben, a kausztikás számolások mellékelt ábráin láthatjuk igazán. A csúcsok okozói tehát egyértelműek. Érdekesebb azonban a lomhán lecsengő grafikonrész magyarázata az ábra közepén. Ez abba a tartományba esik, amikor a mágneses tér elég nagy ahhoz, hogy a lyukak semmilyen belövési szög esetén ne érjenek le a hagyományos potenciálfalhoz, vagy hogy az elektronok se ütközzenek a szupravezető felületén. Rövid számolással kiderül, hogy az ábrán feltüntetett A és B határolópontok rendre az előző eseteknek felelnek meg.

Célunk természetesen nem a rendszer klasszikus viselkedésének minél részletesebb leírása, de mint ahogy látni fogjuk, a klasszikus fizikában értelmezett kausztikák elengedhetetlenek a kvantumviselkedések megértéséhez. A most felvázolt transzmissziós tényezők grafikonjait összehasonlítjuk majd az egzakt kvantumviselkedésekkel. Ha sikeresen megértjük a rendszer kvantummechanikáját, fontos következtetéseket tudunk majd levonni összehasonlításokból a rendszer fizikáját illetően.

1.8. Általában a kausztikákról

Említettük, hogy a kausztikákkal kapcsolatos ismeretek nagyban segíthetik a kvantumviselkedések megértését [9]. Pár mondatban tehát érdemes tisztázni, hogy mik is azok a kausztikák, hogyan lehet őket kiszámolni, és legfőképp, hogy segíthetnek nekünk bármit is megérteni. A kausztika jelenségét megfigyelhetjük a fizika számos területén, de leglátványosabbak az optikai



1.9. ábra. Az elektronok transzmissziós tényezője a mágneses tér függvényében. Az ábra adatai: $W_I k_F = 30$; $W_C k_F = 30$; $L k_F = 450$; $H k_F = 150$ amennyiben W_I és W_C rendre az injektor és kollektor vastagsága, L az injektor és kollektor legközelebbi pontjainak távolsága, H a hullámvezető vastagsága, k_F pedig a ballisztikus elektronok Fermi-hullámszáma.

kísérletek. Ilyenkor a fény terjedését a geometriai optika törvényeivel közelítjük, fénynyalábok törését, visszaverődését, elhajlását (változó törésmutatójú közegben) követjük nyomon. Geometriai (és esztétikai) jelentését tekintve, a kausztikát egyfajta burkológörbéként definiáljuk. Példaként álljanak itt az 1.3. ábrán is megfigyelhető „burkolórajzolatok”. Ha síkban dolgozunk, a görbesereg görbéit egyetlen egy paraméter különbözteti meg egymástól. (pl. egy adott pályához milyen belövési szög tartozik, stb.) A görbét tehát egy jól megválasztott $\Phi(\alpha, \mathbf{r}) = 0$ egyenlet írja le, ahol α az előbb említett megkülönböztető paraméter, \mathbf{r} pedig a görbét leíró helyvektor. Matematikailag a burkológörbét az alábbi differenciálegyenlet-rendszer megoldása írja le:

$$\Phi(\alpha, \mathbf{r}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Phi(\alpha, \mathbf{r}) = 0. \quad (1.6)$$

Megoldásként egy $\mathbf{r}(\alpha)$ függvényt kapunk. Ez éppen a kausztikát írja le. Megjegyezzük, hogy a fenti egyenletrendszer nemcsak effajta folytonos függvények elégíthetik ki, hanem egyéb furcsaságok is. Meglepő módon egy optikai rendszer fókuszpontja is kielégíti az egyenletrendszer, vagyis a fókusz egy egy pontból álló kausztikát ad. (Az állítás nyilvánvaló, ha az α paraméternek a fókuszpontba beérkező nyalábok beesőszögét választjuk.)

Fizikailag a következőről van szó: vegyünk egy α paraméterhez és egy hozzá nagyon közeli $\alpha + d\alpha$ paraméterhez tartozó pályát. Ez a két pálya egyfajta „áramlási csövet” határol. A kausztika pontjaiban a két határoló pálya metszi egymást, mivel a kausztika érintő jellegű. (Ezt írja le az (1.6) egyenlet.) Ekkor az általuk határolt cső keresztmetszete nullára zsugorodik össze, vagyis az áramlási sűrűség végtelen lesz, mivel a szállított energia vagy részecskefluxus nulla méretű felületen kényszerül átáramolni. Ahogy a pályák „visszapattannak” a kausztikáról, az áramlási cső keresztmetszete formálisan előjelet vált. WKB közelítésben [16] a pályák valószínűségi amp-

litúdói egy amplitúdó- és egy fázisfaktor szorzataként adódnak. Megmutatható, hogy az amplitúdófaktor az áramlási cső keresztmetszetének $-\frac{1}{2}$ -dik hatványával arányos.¹ Mivel a cső keresztmetszete előjelet vált, a valószínűségi amplitúdó a kausztikát érintve formálisan $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ fázistolást kap. Az elektron visszavert és beeső hullámai között tehát épp $\Delta\varphi$ a fáziskülönbség. Azonban lyukak esetén ez a fázisugrás $-\Delta\varphi$, azaz épp az ellentettje. A magyarázat nagyon egyszerű: a lyuk mozgása egy vele ellentétes irányba mozgó elektron mozgásával írható le. Amíg az elektron $\Delta\varphi$ fázisugrást, addig a vele ellentétesen mozgó lyuk $-\Delta\varphi$ extra fázist kap.

¹Az áramlási csövek falán nem áramlik ki részecske, ezért a cső mentén az áramlási fluxus állandó. Az áramlási sűrűség egyrészt az áramlási cső keresztmetszetének a reciprokával arányos, másfelől pedig kvantummechanikai számolások szerint az amplitúdófaktor négyzetével.

2. fejezet

A rendszer kvantummechanikája

Ebben a fejezetben a rendszerünkkel kapcsolatos kvantumos számolásokat ismertetjük. Feltesszük, hogy a rendszer viselkedése időben állandó, vagyis az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet megoldásaként kapjuk meg az állapotokat leíró hullámfüggvényeket. A szupravezetőben és a hagyományos hullámvezetőben számolt megoldásokat illeszteni kell majd az említett közegek határfelületén. Így kapjuk meg a rendszer diszperziós relációját, mely megadja a lehetséges állapotok energiáit egy alkalmasan választott paraméter függvényeként. Az energiaspektrumból nagyon sokat tanulhatunk majd a rendszer módusainak viselkedéséről. A kiszámolt módusok segítségével le tudjuk írni a rendszer áramvezetési tulajdonságait is.

2.1. A Bogoliubov de Gennes-egyenlet

Mezoszkopikus rendszerekben az állapotok leírására a Bogoliubov de Gennes - egyenleteket (BdG-egyenletek) használjuk:

$$\begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & -H_0^* \end{pmatrix} \Psi = E \Psi \quad (2.1)$$

$$H_0 = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m_N} - E_F^{(N)} \quad (2.2)$$

Az összefüggésben m_N az elektron effektív tömege, $E_F^{(N)}$ a Fermi-energia, \mathbf{A} a vektorpotenciál és $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i}(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ pedig az impulzusoperátor. Könnyen látható továbbá, hogy $H_0^* = H_0(-\mathbf{A})$. A mátrixoperátor főátlójában a mágneses mezőben mozgó szabad kvázirészecskék Hamilton-operátorai vannak rendre az elektronszerű és lyukszerű állapotokra. (A lyukszerű állapot Hamilton-függvényében szereplő negatív előjel a lyuk negatív effektív tömege, a konjugálás pedig az elektronnal ellentétes töltése miatt kell.) Ennek megfelelően a Ψ hullámfüggvény az ún. *Bogoliubov de Gennes - spinor*, melynek első komponense írja le az elektronállapotokat, a második pedig a lyukszerűeket. Szupravezető anyagban az elektronszerű és lyukszerű állapotok csatolva vannak egymással, nem is lehet őket megkülönböztetni egymástól. Ezt a csatolást írja le a mátrixoperátor mellékátlójában lévő Δ ún. *párpotenciál*. (A Cooper-párok kötési energiája egy elektronnal vonatkoztatva.) A hullámvezetőben nyilván a párpotenciál értéke nulla. Megemlítjük,

hogy ekkor a BdG-spinor elektronszerű komponenséből (Ψ_e) a lyukszerű komponens (Ψ_h) nagyon egyszerűen megkapható: $\Psi_h = \Psi_e(-B, -E)$. Ezt a szimmetriát a számolások során majd felhasználjuk. Végül a félreértések elkerülése végett leszögezzük, hogy a számolásokban e az elektron töltése, azaz $e < 0$ minden egyenletben.

2.2. A hullámfüggvények

A hullámfüggvényeket a BdG-egyenlet megoldásával kapjuk meg. A Függelék A fejezetben részletesen bemutatjuk a számolásokat, most azonban csak a lényegét emeljük ki. A hullámvezetőben olyan vektorpotenciált választunk, mely mellett a BdG-egyenlet szeparálható lesz. Ehhez az szükséges, hogy a vektorpotenciál divergenciamentes legyen, azaz Coulomb-mértékben fogunk dolgozni. Az 1.6. ábrán bevezetett koordinátarendszerben, melynek origóját a hullámvezető-szupravezető határfelületre helyeztük, a vektorpotenciált az alábbi alakúnak választjuk:

$$\mathbf{A} = B \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

A hullámfüggvényt így szorzat alakban kereshetjük. A módusok a hullámvezető mentén eltolásinvariánsak, síkhullámként terjednek. A „síkhullámkomponenst” leíró paraméter a k_y -nal jelölt hullámszám. A hullámfüggvény így

$$\Psi^{(N)}(x, y) = \begin{pmatrix} \Psi_e^{(N)}(x, y) \\ \Psi_h^{(N)}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_e^{(N)}(x) \\ \Phi_h^{(N)}(x) \end{pmatrix} e^{ik_y y}$$

alakú. A hullámvezető keresztmetszetében ($\Delta = 0$) egydimenziósra redukált mozgást kapunk, melynek Schrödinger-egyenlete:

$$\frac{d^2 \Phi_e^{(N)}}{d\xi^2} - \left(\frac{1}{4} \xi^2 + a \right) \Phi_e^{(N)} = 0, \quad (2.4)$$

ahol

$$\xi = \sqrt{2} \left(\frac{x}{L} - \text{Sign}(eB) L k_y \right), \quad a = - \left(\frac{E}{\hbar \omega_c} + \frac{\nu_0}{2} \right), \quad (2.5)$$

$$L = \sqrt{\frac{c\hbar}{|eB|}}, \quad \omega_c = \frac{|eB|}{m_N}, \quad \nu_0 = \frac{2E_F^{(N)}}{\hbar \omega_c}.$$

Az összefüggésekben L az ún. karakterisztikus mágneses távolság, ω_c a ciklotron körfrekvencia, ν_0 pedig a kvantumparaméter: egy végtelen kiterjedésű közegben, melyben homogén mágneses mezőt keltünk, az energiaszintek $\hbar \omega_c$ közönként követik egymást [15]. Ha a pályák energiájának felső korlátja a Fermi-energia, a lehetséges állapotok száma közelítőleg ν_0 lesz, mivel minden energiájú pályát két elektron tud betölteni.

A (2.4) differenciálegyenlet egy parabolikus henger-differenciálegyenlet, melynek két független megoldása van. Ezeknek többféle reprezentációja van [10], de számunkra legelőnyösebb a

Whittaker-függvények használata. A függvényeket U -val és V -vel jelöljük. Ezek asszimptotikus viselkedésére igaz: $\lim_{x \rightarrow \infty} U = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} V = \infty$. A hullámfüggvénynek a hullámvezető szabad határfelületénél el kell tűnnie, így a megoldás egyszerűen adódik:

$$\Psi_e^{(N)}(x, y) = A_e \left(U(a, \xi) + \beta V(a, \xi) \right) e^{ik_y y}, \quad (2.6)$$

ahol β a határfeltételt kielégítő súlyozó együttható. Alakját a függelékben az (A-18) egyenlettel adtuk meg. Ahogy az előző és az A.1 szakaszban említettük, a lyuk hullámfüggvénye hasonlóan adódik:

$$\Psi_h^{(N)}(x, y) = A_h \Phi_e^{(N)}(-B, -E) e^{ik_y y}. \quad (2.7)$$

A szupravezetőben kicsit különbözőek a számolások. Feltesszük, hogy a mágneses mező behatolási mélysége a szupravezetőben végtelenül kicsi. Megtehetjük, hogy a szupravezető egészében nullának vesszük a vektorpotenciált. A BdG egyenlet ekkor automatikusan szeparálható lesz, de az elektronra és lyukra összefüggő egyenleteket kapunk. A függelék A.2 szakaszában részletezett számolások az alábbi eredményt adják:

$$\Psi^{(S)}(x, y) = \left[C_+ \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ 1 \end{pmatrix} \Phi_+^{(S)}(x) + C_- \begin{pmatrix} \gamma_- \\ 1 \end{pmatrix} \Phi_-^{(S)}(x) \right] e^{ik_y y}, \quad (2.8)$$

ahol

$$\Phi_{\pm}^{(S)}(x, y) = \exp \left(\pm i k_F^{(S)} \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k_F^{(S)2}} \mp i \eta x} \right), \quad \eta = \frac{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{E_F^{(S)}}, \quad \gamma_{\pm} = \frac{\Delta}{E \pm i \sqrt{\Delta^2 - E^2}}. \quad (2.9)$$

A számolások során megköveteltük, hogy a hullámfüggvény a határfelülettől távolodva legyen lecsengő ($x \rightarrow -\infty$). A hullámfüggvényeket a hullámvezetőben és a szupravezetőben természetesen még illeszteniük kell egymáshoz. A határfelületen a hullámfüggvények az alábbi egyenleteket elégítik ki [14]:

$$\begin{aligned} \Psi^{(N)}|_{x=0} &= \Psi^{(S)}|_{x=0} \\ \frac{d}{dy} \left[\Psi^{(N)} - \frac{m_N}{m_S} \Psi^{(S)} \right] \Big|_{x=0} &= \frac{2m_N}{\hbar^2} U_0 \Psi^{(N)}|_{x=0} \quad \forall y, k_y. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Az első egyenlet egyszerűen a hullámfüggvény folytonosságát követeli meg, a második egyenlet pedig a Schrödinger-egyenlet integrálja a határfelületen. Az egyenletrendszerrel kapcsolatos számolások most is a függelékben, az A.3 szakaszban tekinthetők meg. A (2.10) egyenlet egy négy ismeretlenes egyenletrendszert mutat. Az ismeretlenek a (2.6), (2.7) és (2.8) egyenletekben szereplő A_e , A_h , C_{\pm} együtthatók. Nem nulla hullámfüggvények illeszkedésének a feltétele az, hogy az egyenletrendszer determinánsa zérus legyen. Az A.3 függelékben megmutatjuk, hogy ezzel a feltétellel ekvivalens az alábbi egyenlőség teljesülése:

$$\boxed{\mathfrak{J} \{D_1 D_4 \gamma_{\pm}\} = 0} . \quad (2.11)$$

Az összefüggésben $\Im(z)$ a z komplex szám képzetes részét jelöli. Továbbá:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \Phi_e^{(N)} & \Phi_+^{(S)} \\ \frac{d}{dx}\Phi_e^{(N)} & Z\Phi_+^{(S)} + \frac{m_N}{m_S}\frac{d}{dx}\Phi_+^{(S)} \end{vmatrix} \quad \text{és:} \quad D_4 = D_1(-B, -E)^*. \quad (2.12)$$

A 4×4 -es determináns kiértékelését tehát visszavezettük két 2×2 determináns szorzatára, ami numerikus és analitikus számolás szempontjából lényeges segítség. A felírt sajátérték-egyenletnek eleget tevő paraméterek esetén tehát léteznek a módusokat leíró nem nulla hullámfüggvények. Ezek azonban eleget tesznek bizonyos normálási feltételeknek, mivel a hullámvezető keresztmetszetében az elektronok és lyukak megtalálási valószínűségének összege 1 kell legyen:

$$\frac{1}{L_y L_z} = \int_0^H (|\Psi_e|^2 + |\Psi_h|^2) dx. \quad (2.13)$$

Az összefüggésben L_y és L_z rendre az y és z irányba eső egységnyi távolságok.

2.3. Az energiaspektrum szemiklasszikus közelítésben

Az előző szakaszban meghatároztuk az elektronok és lyukak stacionárius mozgását leíró állapotfüggvényeket, valamint a megfelelő határfeltételek figyelembevételével megszorítást adtunk a függvényekben felbukkanó önkényes állandóra, az állapotok energiájára. Most ezt a feltételt fogjuk szemiklasszikus közelítésben megvizsgálni.

Vizsgálódásaink során az alábbi egyszerűsítő feltevéseket tesszük: a szupravezető-hullámvezető határfelületet tökéletesen illeszkedőnek vesszük, azaz a számolások során a Fermi-energiák és az effektív tömegek egyenlőségét tételezzük fel. ($E_F^{(S)} = E_F^{(N)}$ és $m_S = m_N$) Továbbá feltesszük még azt is, hogy az (A-36) egyenletben szereplő U_0 (Dirac-delta szerű potenciál) is nulla. Az ehhez a szakaszhoz tartozó számolások a Függelék B fejezetében vannak részletezve. Először is megmutatható, hogy ha E jó megoldása a határfeltételnek, akkor $-E$ is jó sajátérték, csak éppen más hullámfüggvényekkel. Ezért a $(-\Delta, \Delta)$ helyett csak a $(0, \Delta)$ tartományban fogjuk keresni a lehetséges energiaértékeket.

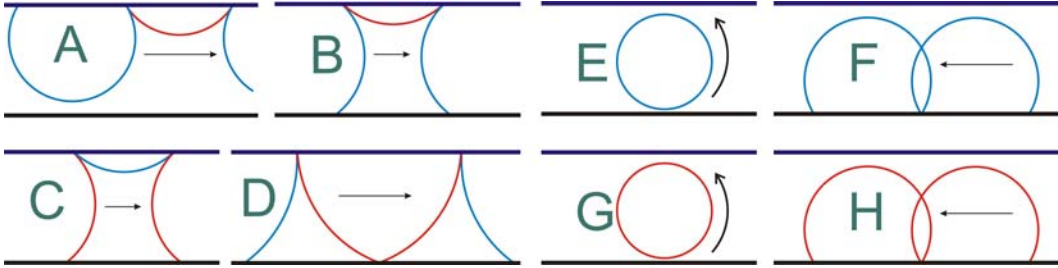
A kirajzolt disperziós relációkat önmagukban nem tudjuk megérteni. Hogy klasszikusan is megértsük a kvantummechanikai eredményeket, az eddigi egzakt számolások mellett szemiklasszikus közelítésekkel is megbecsüljük a módusok energiáit. Végül közös ábrákon ellenőrizzük, hogy a két jóslat mennyire egyezik. A célkitűzés az, hogy két szálon jussunk el ugyanahhoz az eredményhez:

- Egzakt kvantummechanikai számolásokkal, melyek a BdG egyenlet megoldásán alapszanak. Ezeket a számolásokat az előző szakaszban elvégeztük.
- Szemiklasszikus közelítésekkel. Ezzel egyfajta összekötő hidat építünk a kvantummechanika és a klasszikus fizika között. Ezeknek a számolásoknak az eredményeit mutatjuk most be.

Látni fogjuk, hogy a két számolás eredménye nagyon jól egyezik. Mivel klasszikusan a részecskék x irányban periodikus mozgást végeznek, a pályák hatásintegrálja kielégíti a Bohr-Sommerfeld -féle kvantálási feltételt [15]:

$$\frac{1}{\hbar} \oint p_x dx + \gamma = 2\pi n . \quad (2.14)$$

Az állítást a (2.11) egyenletből kiindulva a Függelék B fejezet B.1 szakaszában bizonyítjuk. A pályák geometriáját tekintve 8 különböző pályatípust különböztetünk meg, melyeket az ABC nagybetűivel jelöljük. A lehetséges pályák gyűjteményét a 2.1. ábra mutatja. A kvantumfeltétel



2.1. ábra. A lehetséges pályák.

kiértékeléséhez szükségünk van a pályák

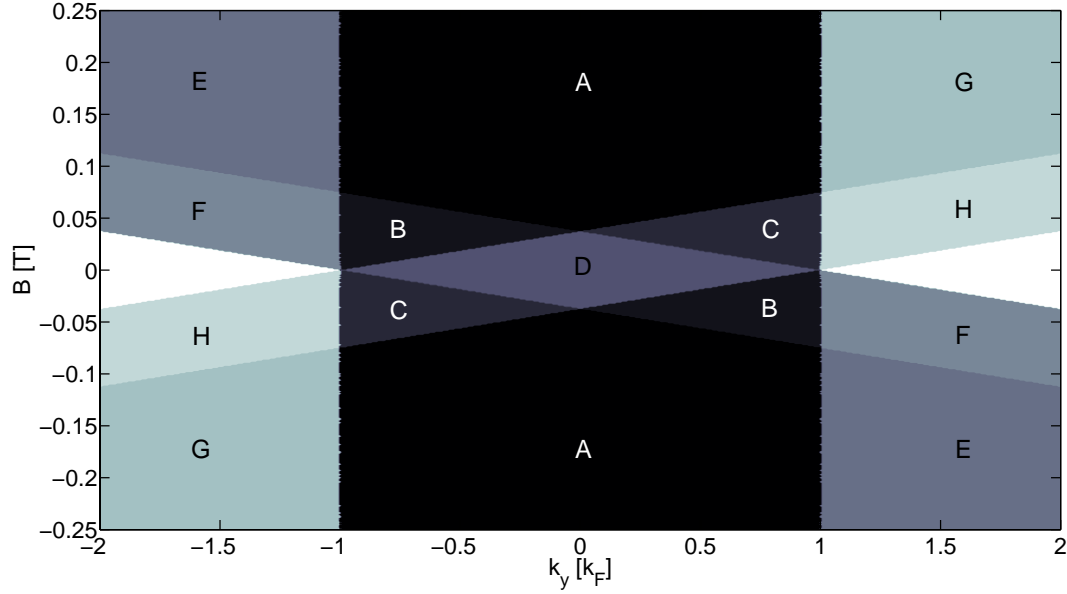
$$S = \frac{1}{\hbar} \oint p_x dx$$

hatásintegráljára és az extra γ fázis tagra. A hullámok fázisjárulékokat a két határfelületen való ütközések és a kausztikák érintése során kapnak. Mivel 8 különböző pályatípus van, 8 integrált és extra fázis tagot kell meghatározni. Most összefoglaljuk, hogy az egyes ütközések mekkora fázistolást jelentenek:

- Ütközés a szupravezető határfelületén lyuk és elektron esetén egyaránt: $\gamma_A = -\arccos\left(\frac{E}{\Delta}\right)$ (lásd: Andreev-fázistolás a Függelék B fejezetben)
- Ütközés a hullámvezető szabad határfelületén lyuk és elektron esetén egyaránt: $\gamma_N = \pi$
- A kausztika érintése elektron esetén: $\gamma_e = -\frac{\pi}{2}$; lyuk esetén: $\gamma_h = \frac{\pi}{2}$ (lásd: Általában a kausztikáról a bevezetőben)

Az egyes hatásintegrálokat és egyéb fázis tagokat a B.2 szakaszban számoljuk ki. Most csak az eredményekkel foglalkozunk: eljutottunk ahhoz a ponthoz, mint az egzakt kvantum számolásokkal is. Nagy jelentősége lenne annak, ha a „két szál” valóban ugyanahhoz az eredményhez vezetne, mert megértenénk az energiaspektrum egyes módusainak a jellegét. Mielőtt azonban meggyőződünk az egyezésről, kategorizálnunk kell, hogy az egyes pályatípusok egyáltalán milyen paramétertartományokban létezhetnek. Megadunk egy általános eljárást a pályák x irányú fordulópontjainak meghatározására. Vegyük elő az A.1 szakaszban a (2.2) egyenlettel megadott Hamilton-operátort, ami rövid rendezéssel az alábbi alakra hozható:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{p}_x^2}{2m} + \frac{(eB)^2 \left(x - \frac{\hbar}{eB} k_y\right)^2}{2m} - E_F . \quad (2.15)$$



2.2. ábra. A lehetséges pályák „fázisdiagramja”. Az ábra adatai: $\Delta/E_F = 0.1$; $k_F H = 26.7$; $E = 0$

Ez a Hamilton-operátor egy egydimenziós mozgást ír le. Az első tag a kinetikus energiát, a második tag pedig az x irányra redukált mozgás effektív potenciálját, $V(x)$ -et adja meg. A mozgás fordulópontjai ott vannak, ahol $V(x) = E$. Az elektronra vonatkozó fordulópontok a falak figyelembevételével így nagyon egyszerűen adódnak:

$$\tau_+^e = \min \left\{ H, \frac{\hbar}{eB} k_y + \sqrt{\frac{2m}{(eB)^2} (E_F + E)} \right\}, \quad (2.16)$$

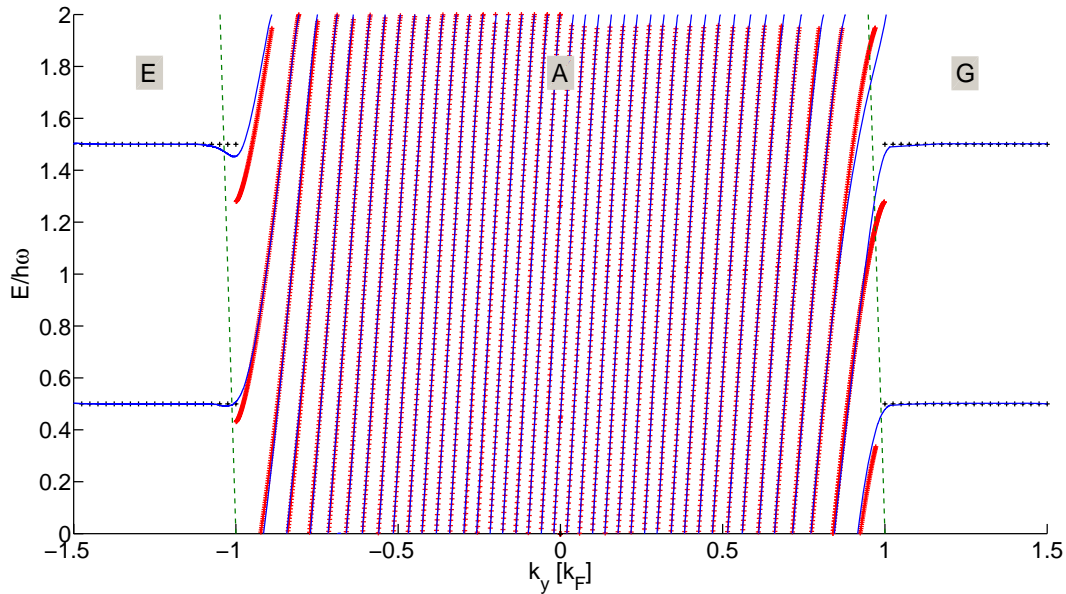
$$\tau_-^e = \max \left\{ 0, \frac{\hbar}{eB} k_y - \sqrt{\frac{2m}{(eB)^2} (E_F + E)} \right\}. \quad (2.17)$$

A lyukak mozgására vonatkozó fordulópontok a már megszokott helyettesítésekkel pedig:

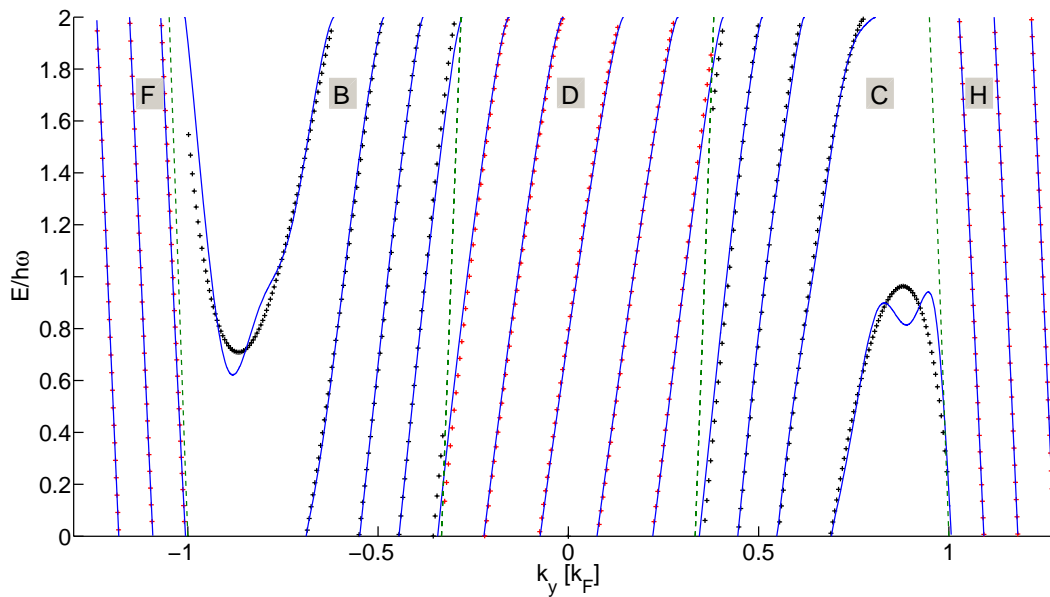
$$\tau_+^h = \tau_+^e(-B, -E), \quad \tau_-^h = \tau_-^e(-B, -E). \quad (2.18)$$

A megadott fordulópontokkal egyfajta térképet, fázisdiagramot rajzolhatunk, melyet aszerint színeztük ki, hogy az egyes ponthalmazok milyen pályatípusnak felelnek meg. Az eredményt az $E = 0$ esetre a 2.2. ábra szemlélteti. Ahogy az ábrán látjuk, nem fordulhat elő az összes lehetséges pályatípus egyszerre egy rendszerben. Ha például a hullámvezető vastag a mágneses mezőhöz képest, a kvázirészecskék nem tudnak mindkét határfelületen ütközni. A 2.3. ábra energiaspektrumán a szupravezető határfelületén „végigfutó” „A” módus, valamint az „E” és „G” módusokat leíró Landau-nívókat figyelhetjük meg. Ha csökkentjük a hullámvezető vastagságát, megjelennek az eddig vizsgált többi pályák is. A 2.4. ábra szemlélteti a fennmaradó „B” „C” „D” „F” „H” módusokat is. Az elektron \mathbf{j}_e és lyuk \mathbf{j}_h részecskeáram-sűrűségét az

$$\mathbf{j}_e = \frac{1}{m} \Re \left\{ \Psi_e^* \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_e \right\}, \quad \mathbf{j}_h = \frac{1}{m} \Re \left\{ \Psi_h \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_h^* \right\}. \quad (2.19)$$

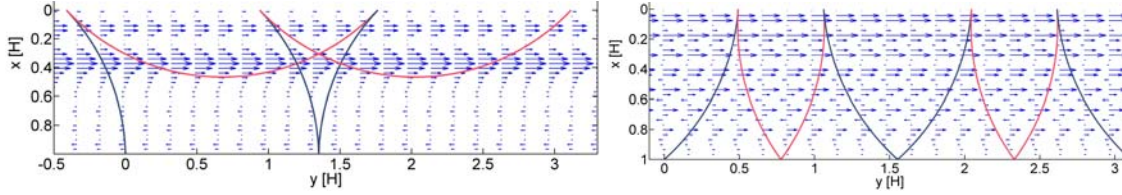


2.3. ábra. Az energiaspektrum szemiklasszikus közelítése. Az ábra adatai: $\nu_0 = 40$; $\Delta/\hbar\omega_c = 2$; $k_F H = 106.7$; $R/H = 0.375$. Az egyes paraméterek a (2.5) összefüggésekkel definiáltak. Kékkel az egzakt szekuláris egyenlet megoldásai láthatóak, a színes keresztek pedig a különböző típusú pályákhoz tartozó szemiklasszikus közelítéseket ábrázolják.



2.4. ábra. Az energiaspektrum szemiklasszikus közelítése. Az ábra adatai: $\nu_0 = 40$; $\Delta/\hbar\omega_c = 2$; $k_F H = 26.7$; $R/H = 1.5$. Az egyes paraméterek a (2.5) összefüggésekkel definiáltak. Kékkel az egzakt szekuláris egyenlet megoldásai láthatóak, a színes keresztek pedig a különböző típusú pályákhoz tartozó szemiklasszikus közelítéseket ábrázolják.

összefüggések írják le [13], [8]. Az összefüggésben $\Re(z)$ a z komplex szám valós részét jelöli. A 2.5. ábra mutatja az részecskék összármsűrűségét két módus esetében. Az ábrák ugyancsak



2.5. ábra. Részecske-áramsűrűségek egy „B” és egy „D” pályatípus esetére: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h$. Jól látható, hogy a módusok áramszállítása eltolás invariáns a hullámvezető mentén.

tartalmazzák a módusokhoz tartozó klasszikus pályákat is. A hullámvezető keresztmetszetében átáramló részecskeáramot az áramsűrűségek felületi integrálja adja meg. Az integrálofelület a hullámvezető keresztmetszetébe esik. Felhasználva a (2.13) egyenletet, a részecskeáram:

$$I_p = \oint_A (\mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h) \mathbf{dA} = \frac{L_z}{m} \Re \left\{ \int_0^H \left[\Psi_e^* \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_e + \Psi_h \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi_h^* \right] dx \right\}. \quad (2.20)$$

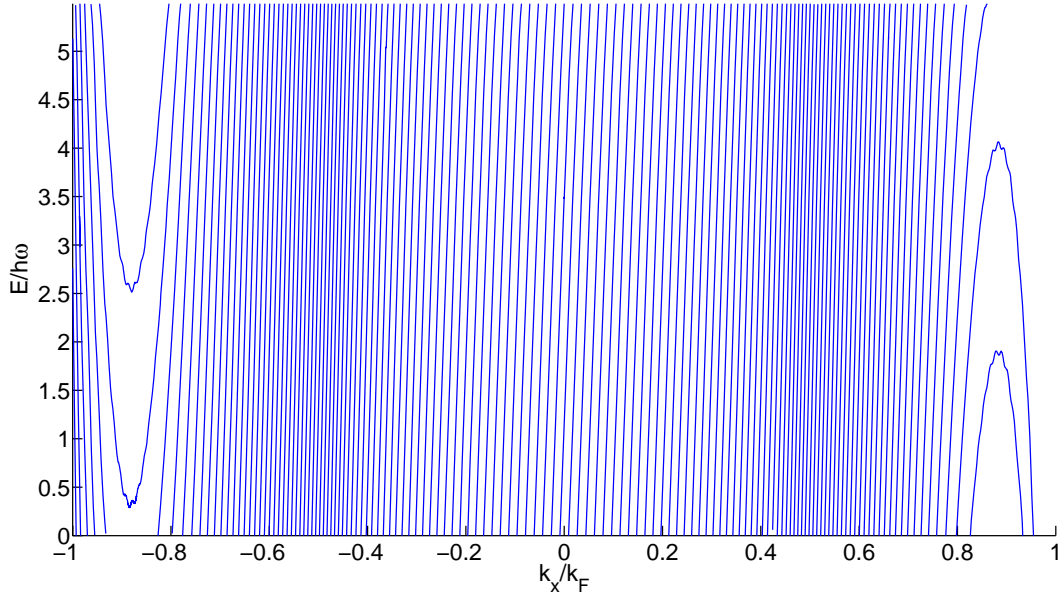
Az összefüggés egy szorzótényező erejéig nem más, mint a részecskék várható sebessége a hullámvezető hosszanti irányában, vagyis a keresztmetszetben terjedő síkhullámkomponens csoportsebességével egyenlő. Tehát:

$$I_p = \frac{v_g}{L_y} = \frac{1}{L_y} \frac{\partial}{\partial (\hbar k_y)} E(k_y). \quad (2.21)$$

Mint látjuk, a diszperziós reláció energiavonalainak meredeksége a keresztmetszet részecskeáramával arányos. A felrajzolt energiaspektrumok segítségével nyomon követhetjük, hogy a hullámvezetőben a részecskék effektíve milyen irányba áramlanak. A 2.3. ábrán látható nulla meredekségű Landau-nívók nem írnak le részecskeáramlást. A 2.4. ábrán a „B” és „C” módusok keretén belül pedig az áramlás előjelet vált. A változás háttérében klasszikusan azok a pályák állnak, melyekben az elektronok és a lyukak periodikus pályát futnak be: a szupravezető felületén kétszer, a szabad határfelületen pedig egyszer ütköznek a kvázirészecskék. Az ütközési pontok nem mozdulnak el, a periodikus pálya egy olyan háromszögalak lesz, melynek oldalai befelé görbülnek. Alakjából adódóan ezt a pályát háromszög pályának nevezzük el. Ezzel a pályával a kausztikasámolások során is találkoztunk a Függelék D fejezetben: a pályának köszönhetően a kausztikagörbék egy pontban metszik egymást. (D-6. ábra)

A diszperziós relációk különböző módusokba kategorizált többi energiavonalának meredeksége összhangban van a 2.1. ábra pályáiból naiv módon következtetett áramlási iránnyal.

Az eddig bemutatott energiaspektrumokon nagyon jól sikerült kategorizálni az egyes módusokat. Ezt a kvantumos és szemiklasszikus eredmények egyezése tette lehetővé. Az egyezést növelni lehet, ha növeljük a rendszer kvantumszámait. A 2.2 szakaszban láttuk, hogy a rendszer kvantummechanikájában a ν_0 kvantumparaméter játssza az egyik meghatározó szerepet. Eddig $\nu_0 = 40$ értéket használtunk. Ha ezt növeljük, a kvantumos és szemiklasszikus eredmények várhatóan egyre jobban fognak egyezni, mivel az általános elvek szerint nagy kvantumszámok esetén egyeznek meg a kvantummechanika és a klasszikus fizika jóslatai. A 2.6. ábrán $\nu_0 = 550$ értékre rajzoltuk ki a diszperziós relációt. Ilyen nagy kontrollparaméter érték mellett az egyezés gyakorlatilag tökéletes. Klasszikus esetben bármilyen belövési szöggel paraméterezett pálya lehetséges.



2.6. ábra. Az egzakt energiaspektrum. Az ábra adatai: $\nu_0 = 550$; $R_{cycl}/H = 1.83$; $\Delta/\hbar\omega_c = 5.5$; $k_F^{(N)}H = 300$. Az egyes paraméterek a (2.5) összefüggésekkel definiáltak.

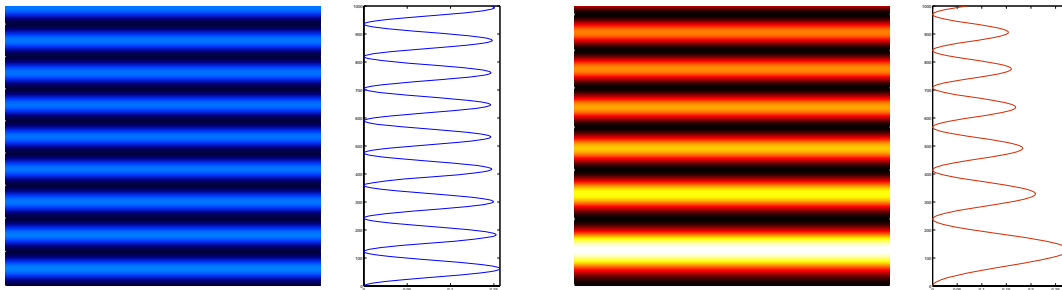
Ennek megfelelően a 2.6. ábrán a módusok száma valóban lényegesen megnő. Az energiaspektrumokban az is figyelmet érdemel, hogy a különböző módusok csoportsebessége közel egyenlő, vagyis az összes módus egyforma mértékben „áramlik”. A Függelék B fejezet (B-7) egyenletét differenciálva, a csoportsebesség közelítő formulája:

$$v_g = \left. \frac{\partial E}{\partial (\hbar k_y)} \right|_{k_y \rightarrow 0} = \nu_0 \frac{1}{\frac{\pi}{\hbar\omega_c} + \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}} \frac{1}{\hbar k_F}. \quad (2.22)$$

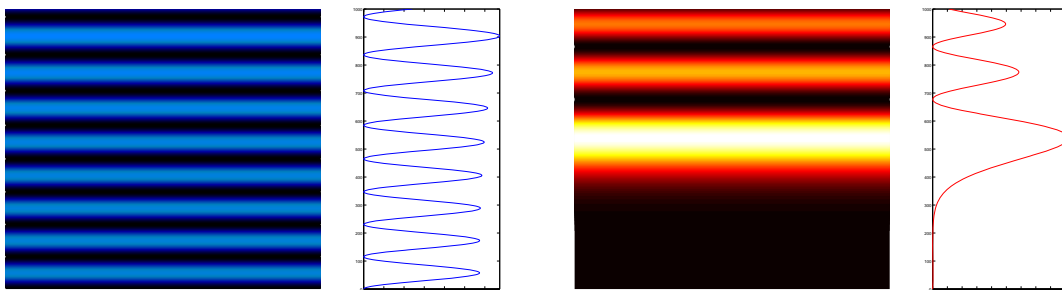
A csoportsebesség tehát arányos a ν_0 kvantumparaméterrel. Vagyis a kvázirészecskék annál gyorsabban terjednek a hullámvezetőben, minél nagyobbak a kvantumszámok. Ez a kirajzolt energiaspektrumokkal is összhangban van.

2.4. A kirajzolt hullámfüggvények

Mielőtt rátérnénk a pontkontaktusokkal ellátott rendszer áramvezetési tulajdonságaira, vizsgáljuk meg hogy a 2.2 szakaszban megadott hullámfüggvények milyen mértékben viselik magukon a különböző pályatípusok tulajdonságait. A célnak megfelelően tehát felrajzolunk néhány, a 2.4. ábra adatainak megfelelően különböző pályakategóriákba sorolt hullámfüggvényt. Kezdjük rögtön a 2.7. ábrán bemutatott „D” pályatípushoz tartozó hullámfüggvényt. Elvárásaink szerint a hullámfüggvények elektron és lyuk esetében egyaránt „kitöltik” a hullámvezető keresztmetszetét. Ennek így kell lennie, hiszen „D” típusú pályákról van szó. A lyuk hullámfüggvényében a hullámvezető falánál egy éles maximumot látunk. Ahogy csökkentjük a 2.7. ábrához tartozó k_y kvantumparamétert, ez a maximum leválik a hullámvezető pereméről. Létrejönnek a „B” típusú pályák, amikor a lyukak klasszikus pályái már nem



2.7. ábra. Az elektron és lyuk hullámfüggvényei $k_x = -0.25 k_F$ esetében. Ez a konfiguráció a „D” típusú pályákhoz tartozik. Kékkel az elektron, pirossal a lyuk megtalálhatósági valószínűsége van ábrázolva. Az ábrát felülről a szupravezető, alulról pedig a hullámvezető fala határolja. Az ábra adatai: $k_F H = 26.7$; $R/H = 1.5$; $\nu = 40$; $\frac{\Delta}{\hbar\omega_c} = 2$

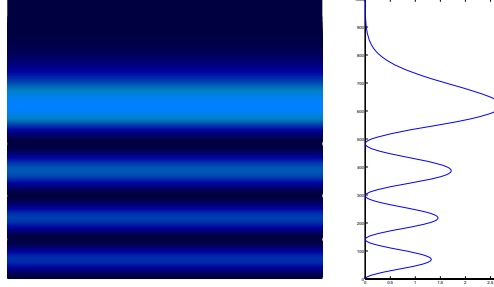


2.8. ábra. Az elektron és lyuk hullámfüggvényei $k_x = -0.6 k_F$ esetében. Ez a konfiguráció a „B” típusú pályákhoz tartozik. Kékkel az elektron, pirossal a lyuk megtalálhatósági valószínűsége van ábrázolva. Az ábrát felülről a szupravezető, alulról pedig a hullámvezető fala határolja. Az ábra adatai: $k_F H = 26.7$; $R/H = 1.5$; $\nu = 40$; $\frac{\Delta}{\hbar\omega_c} = 2$

érnek le a határfelülethez. A (2.18) egyenlettel megadott fordulópontok közül a megfelelő, az éles maximum lecsengő szárára illeszkedik. A kvantummechanikában megszokott, hogy a hullámfüggvény a klasszikusan megszabott határfelületeken túlnyúlik, azonban lecsengő függést mutat. Hasonló tulajdonságot figyelhetünk meg az elektron hullámfüggvényének rajzolatában is, például ha az „F” pályatípust meghatározó k_y kontrollparamétert használunk. A hullámfüggvény ekkor a szupravezető határfelületéről válik le, az éles maximum is itt figyelhető meg. A (2.16) egyenlettel megadott fordulópont most is a „főmaximum” lecsengő szárára illeszkedik. Az elmondottakat a 2.9. ábrán figyelhetjük meg. A lyuk hullámfüggvényéről ebben az esetben csak annyit említünk meg, hogy nem mutat összilláló jelleget, hanem lecsengő. A fordulópontok egy a rendszeren kívüli mozgástományt határoznak meg. A lecsengő hullámfüggvény tehát matematikailag a fordulópontokon túlnyúló hullámfüggvény lecsengő részének a következménye.

2.5. Konduktancia

Az előzőekben részletesen megvizsgáltuk magára hagyott szupravezető rendszerünk lehetséges kvantumállapotait. Most áramvezetési kontaktusokat csatlakoztatunk a hullámvezetőhöz



2.9. ábra. Az elektron hullámfüggvénye $k_x = -1.2 k_F$ esetében. Ez a konfiguráció az „F” típusú pályákhoz tartozik. Az ábra az elektron megtalálhatósági valószínűségét szemlélteti. Az ábrát felülről a szupravezető, alulról pedig a hullámvezető fala határolja. Az ábra adatai: $k_F H = 26.7$; $R/H = 1.5$; $\nu = 40$; $\frac{\Delta}{\hbar\omega_c} = 2$

(1.6. ábra). Az így létrehozott „áramkört elem” jól definiált vezetőképességgel rendelkezik, mely látványos függést mutat a mágneses mezőtől. A továbbiakban a vezetőképességre próbálunk meg becslést adni kvantummechanikai számításokkal, majd az eredményeket összehasonlíthatjuk naiv klasszikus billiárdmodellünk eredményeivel. A számolások során Fermi-energiaszinten lévő részecskéket fogunk vizsgálni, vagyis azt az esetet, amikor $E = 0$.

Határozzuk meg, hogy az injektoron bevezetett I_i áramnak hányad része tud kijutni a kollektor és az átvezetett áram mekkora feszültségkülönbséget létesít a bemenet és kimenet között. Amennyiben a kvázirészecskék sűrűségét a Ψ spinor írja le, úgy a mozgásuk által létesített áramlássűrűségeket a (2.19) egyenlet írja le. Az áramsűrűséget természetesen a már meghatározott módusok segítségével szeretnénk meghatározni, annak ellenére, hogy a kontaktusok jelentős mértékben is befolyásolhatják a hullámfüggvényt. Azonban, ha a kontaktusok méretei összehasonlíthatóak a kvázirészecskék Fermi-hullámhosszával, a hullámfüggvényeket kis δx távolságra a kontaktusoktól perturbálatlannak feltételezhetjük a kontaktusok nélküli rendszerhez képest [6][7]. Ezért a rendszerben ún. pontkontaktusokat használunk. A perturbálatlan hullámfüggvények a határfelületen eltűnnek, ezért nemcsak a hullámfüggvény, hanem annak *falmenti* deriváltja is nulla: $\Psi \equiv 0$ és $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$. Ekkor a részecskék *töltésárama* a kollektor helyén:

$$I_c = \varepsilon \left(\left| \frac{\partial \Psi_e}{\partial x}(H, L) \right|^2 - \left| \frac{\partial \Psi_h}{\partial x}(H, L) \right|^2 \right). \quad (2.23)$$

Az összefüggésben ε egy határozatlan paraméter. Később látjuk, hogy kiesik a Hall-ellenállás számolásánál. A hullámfüggvény a kollektorba vezető pályák valószínűségi amplitúdóinak az összegével közelíthető. Az egyes pályák járulékait egy amplitúdó A_p és egy fázisfaktor $e^{i\Phi_p}$ szorzataként kapjuk. A fázisfaktorban szereplő Φ_p függvényt a kollektorba érkező, $p - 1$ hagyományos ütközésű pályák hatásintegráljának és az extra fázisjárulékaiknak összeszámlálásával kapjuk meg:

$$\Phi_p = \frac{1}{\hbar} \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} + \Gamma_p. \quad (2.24)$$

Klasszikusan csak a „B” és „D” típusú pályákkal tudunk kvázirészecskéket juttatni a kollektorba. A számolásokat ezekre a módusokra végezzük el. A „C” pályatípussal nem foglalkozunk, mert az injektoron keresztül elektronokat vezetünk be, ami kizárja ezt a módust is.

Érdeemes a számolásokat először csak az elektron hullámfüggvényére elvégezni, mivel megfelelő módosításokkal a lyukra hasonló eredményt kell kapnunk. Így nyomon követve a Függelék C fejezetben közölt részletes számolásokat, az elektron hullámfüggvényére az alábbi összefüggés adódik:

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial x}(H, L) = -2ik_F \left(\sum_{P \geq p_{min}} \cos \alpha_p A_p e^{i\Phi_p^B} + \sum_{p_{max} \geq P \geq p_{min}} \cos \alpha_p A_p e^{i\Phi_p^D} \right). \quad (2.25)$$

Az egyenletben az A_p amplitúdófaktor a (C-1) összefüggéssel adott. A (2.25) egyenletből azonban nem könnyű kihámozni azokat az információkat, amelyek bennünket érdekelhetnek: a perturbálatlan módusok milyen arányban vesznek részt az áramszállításban? Kézenfekvőnek látszik azt hinni, hogy éppen a módusok tudnak áramot szállítani, hiszen csak ezek a pályakonfigurációk tudnak stacionáriusan kialakulni. A (2.25) egyenletben a hullámfüggvény felírásához használt fázisfaktorok nagyon gyorsan változnak az ütközési paraméter, p változtatásával. Az interferáló tagok így sok helyen teljesen kioltathatják egymást. Lényeges járulékot ott kapunk, ahol Φ_p -nek 2π -re vonatkozó maradéka elsőrendben nem változik. A Függelék C fejezet C.2 szakaszában megmutatjuk, hogy a lényeges fázisjárulékok éppen az egyes módusokhoz tartozó konfigurációk környékén vannak és csak ott vannak! Ez nagyon fontos felfedezés! Így lehetőségünk adódik, hogy a (2.25) egyenlet pályáösszegzése helyett áttérjünk a módusok szerinti felbontásra:

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial x}(H, L) = -2ik_F \left(\sum_{K=B,D} \sum_n \sqrt{2\pi i \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}^K}{\partial p_n^2} \right)^{-1}} \cos \alpha_{p_n}^K A_{p_n}^K e^{ik_{y_n}^K L - i\pi} \right). \quad (2.26)$$

A szemiklasszikus közelítések választ adnak arra, hogy az összes lehetséges módus közül melyeket kell a (2.26) egyenletben számbavennünk: nemcsak a „B” és „D” módusokat kell kiválasztani, de a „B” típusúak közül is csak azokat, melyeknek a csoportsebessége megegyezik a „D” típusú módusok csoportsebességével. Az ellenkező irányba terjedő hullámok ugyanis nem tudnak áramot szállítani a kollektorba. A határpont a 2.3 szakaszban és a Függelék D kaosztikákkal kapcsolatos számolásai során megismert háromszögpályában van.

Az egyes módusok szerepéről az áramszállításban a (2.26) egyenletben szereplő gyökjel hordozza a lényeges információt. A többi szorzótényező a fázisfaktoron kívül csupán az injektálás módszerének a következménye. A gyökjel alatti második derivált azt írja le, hogy a fázis 2π -re vonatkoztatott maradékfüggvényére illesztett haranggörbe milyen széles, azaz mekkora a szórása. Ezért ha az illesztett haranggörbe keskeny (a derivált értéke nagy), akkor a hozzá tartozó módus kisebb mértékben vesz részt az áramszállításban.

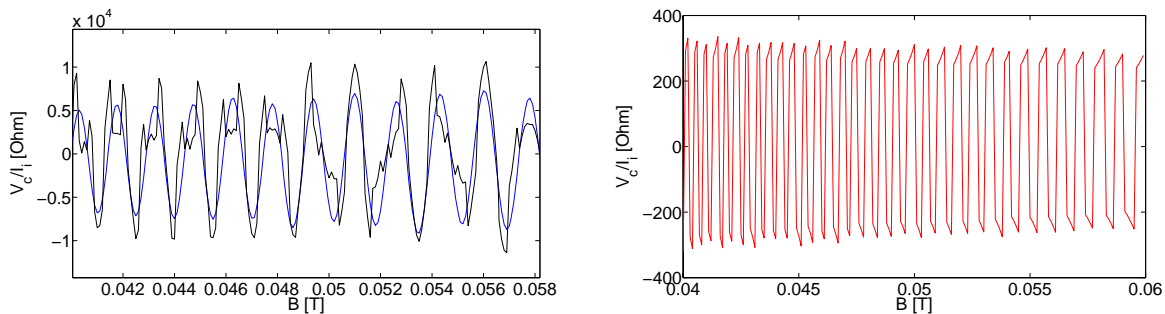
Most rátérünk a lyukak hatására is az áramvezetésben. Ebben az esetben is csak a „B” és „D” típusú pályák jöhetnek számításba, azonban ezek közül is csak az utóbbiak tudnak a célba lyukakat szállítani. A hullámfüggvénnyel kapcsolatos részletes számolásokat a Függelék C C.3 szakaszában mutatjuk be. Csak annyit említünk meg, hogy az elektronra alkalmazott levezetést csupán a fázis számolásánál kell módosítanunk. A számolások a lyuk hullámfüggvényére az alábbi összefüggéshez vezetnek:

$$\frac{\partial \Psi_h}{\partial x}(H, L) = -2ik_F \left(\sum_n \sqrt{2\pi i \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}^{hole}}{\partial p_n^2} \right)^{-1}} \cos \alpha_{p_n}^D A_{p_n}^D e^{ik_{y_n}^D L - i\pi} \right). \quad (2.27)$$

Becslést adtunk tehát mind az elektron, mind pedig a lyuk hullámfüggvényére a kollektor helyén. Az áramot így már nagyon könnyen ki tudjuk számolni a (2.23) egyenlet segítségével. Ha azonban a kollektoron mérhető feszültséget szeretnénk kiszámolni¹, számításba kell vennünk a kollektor, mint pontkontaktus vezetőképességét is. Ezzel a Függelék D fejezet C.4 szakaszában foglalkozunk bővebben, most csak az eredményeket használjuk fel. A pontkontaktus vezetőképessége a (C-31) egyenlet szerint az elektron és lyuk áramára különböző lehet, mert az elektront több módus tudja a kollektorba szállítani. A kollektor feszültsége nagyon jól mérhető mennyiség, melyet az elmondottak szerint az alábbi összefüggéssel tudunk megbecsülni:

$$V_c = \varepsilon \left(\frac{|\frac{\partial \Psi_e}{\partial x}(H, L)|^2}{G_e} - \frac{|\frac{\partial \Psi_h}{\partial x}(H, L)|^2}{G_h} \right). \quad (2.28)$$

A képletben megjelenő ε határozatlan paraméter nem jelent gondot, mert ugyanez a paraméter



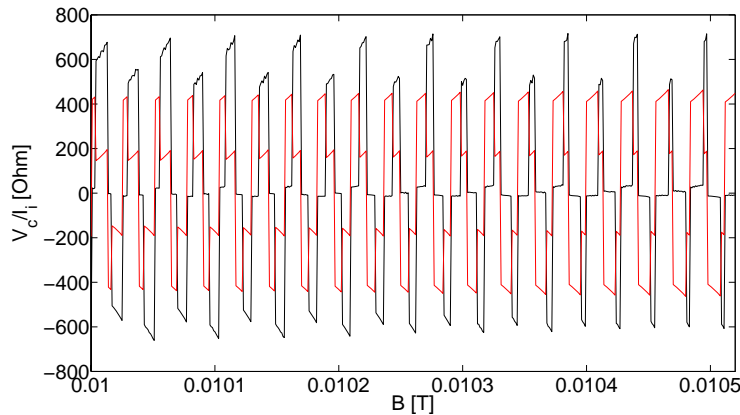
(a) A (2.28) egyenlet által megadott Hall-ellenállás a mágneses mező függvényében. Az ábra adatai: $\nu_0 = 40$; $k_F H = 26.67$; $\frac{\Delta}{\hbar\omega_c} = 2$; $L/H = 10$

(b) A klasszikus billiárdmodell numerikus eredménye a konduktancia mágneses mezőtől való függésére. Az ábra adatai: $k_F H = 26.67$; $L/H = 10$

2.10. ábra. A konduktancia mágneses mezőtől való osszcilláló függése.

szerepel a pontkontaktus vezetőképességében is, így a számolások során egyszerűen kiesik. A programozási és mérési feladatokat tekintve a feszültség helyett érdekesebb a $\frac{V_c}{I_i}$ „Hall-ellenállást” vizsgálni, vagyis hogy a bevezetett egységnyi áram mekkora feszültséget indukál a kollektoron. A (2.28) és egyenlet számítógépes szimulációját a 2.10(a). ábra szemlélteti. Az ábrán látható a pályainterferenciás és módusösszegzéses módszer eredménye egyaránt. (rende a (2.25) és (2.26) egyenletek) Mint látjuk, a kvantumos eredmények nagyon jó összhangban vannak. A 2.10(b). ábrán ugyanebben a paramétertartományban látjuk a klasszikus billiárdmodell numerikus eredményeit. Mint látjuk, a konduktancia mágneses mezőtől való függése jelentősen különbözik a kvantumos jóslatoktól. Próbáljunk választ találni arra, hogy milyen körülmények között egyezhetnek meg a kvantumos és klasszikus eredmények. A pontkontaktus vezetőképessége sok szabad módus esetén nyilván megegyezik a klasszikus vezetőképességgel. Így elég csak a pontkontaktuson átvezetett áramra koncentrálnunk. A 2.25 egyenlet a pályainterferenciás összegzésen alapuló szemiklasszikus megközelítést fogalmazza

¹A kísérletekben ezt a mennyiséget tudjuk közvetlenül mérni.



2.11. ábra. A pályák interferenciájával számolt konduktancia (fekete színű grafikon) és a klasszikus billiárdmodell numerikus eredményei (piros színű grafikon).

meg:

$$\begin{aligned}
 I_c &\sim \left| \frac{\partial \Psi_c}{\partial x}(H, L) \right|^2 \sim \left| \sum_p \cos \alpha_p A_p e^{i\Phi_p} \right|^2 = \\
 &= \sum_p |\cos \alpha_p A_p|^2 + \sum_i \sum_{j < i} 2 \cos \alpha_i \cos \alpha_j A_i A_j \cos(\Phi_i - \Phi_j) .
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Az egyenletlánc utolsó tagjában az első összeadandó a „klasszikus járulékot” jelenti, a második tag pedig az interferenciát. Az interferenciát akkor tűnik el, ha az összegben lévő trigonometrikus függvény argumentumai korrelálatlanok. Ennek szükséges feltétele egyrészt az, hogy nagyon sok fázistag legyen, vagyis nagyon sokféleképpen lehessen eljutni a kollektorba. Ez kis mágneses mezőkre lesz érvényes, azaz nagy görbületi sugarak mellett. A Függelék C fejezet C.5 szakaszában megmutatjuk, hogy ekkor $\Phi_p \sim R^2$, vagyis nagyok lesznek a fázisok. Így valóban jogosnak látszik azt állítani, hogy a fázistagok korrelálatlanok lesznek és az interferenciát elhanyagolható lesz a klasszikus járulékkal mellett. A teljesség kedvéért azonban meg kell mutatnunk azt is, hogy a fázistagok együtthatói ($|A_p|^2$) egyenlő nagyságrendűek lesznek. A (C-1) összefüggésből könnyen látszik, hogy az amplitúdófaktor négyzete legalább $1/p$ ütemben csökken. (Ez teszi konvergensevé a végtelen összegzést.) Nagy görbületi sugarak esetén csak sok ütközés után juthatunk el a kollektorba. Nagy p -k esetén viszont a lecsengő amplitúdófaktor már nem változik sokat, ezért valóban azonos nagyságrendű korrelálatlan tagokat kapunk az interferenciát szummájában. A 2.11. ábra numerikusan is alátámasztja analitikus érveléseinket. Látjuk, hogy kis mágneses mező esetén a kvantumos és klasszikus szemléletmód jó közelítéssel ugyanarra az eredményre vezet. A hullámvezető vastagságával összemérhető ciklotronsugár esetében az összegzésben kis ütközésszámok is megjelennek, valamint a fázisok sem lesznek teljesen korrelálatlanok. Az összegzésben a lecsengő amplitúdótag miatt csak az első néhány összeadandó lesz lényeges.

2.6. Összefoglalás

A dolgozatban részletesen megvizsgáltuk a szupravezetővel határolt, homogén mágneses térbe helyezett, „végtelen” szalag geometriájú hullámvezető stacionárius állapotait: az elektronszerű és lyukszerű állapotok együttes energiaspektrumában szemiklasszikus közelítésekkel azonosítottuk az egyes módustípusokat. Ez az eljárás lehetőséget adott arra, hogy WKB közelítési elveknek megfelelően kiválasszuk azokat az állapotokat, melyek aktívan részt vesznek a rendszerhez csatlakoztatott pontkontaktusok közti áramátvitelben. Megmutattuk, hogy az áramvezetés, illetve a ténylegesen mérhető „Hall-ellenállás” a mágneses mezőnek hevesen osszcilláló függvénye. A kvantumos interferenciaeffektusok nagymértékben befolyásolják az eredményeket, a klasszikus határesetet csupán nagyon kicsi mágneses mezők esetén kapjuk vissza. A dolgozatban vizsgált elrendezés kísérleti megvalósítása reális. A mért konduktancia heves osszcillálása nemcsak újabb bizonyítéka lehetne az Andreev-reflexiónak, de speciális elrendezésnél a rendszer gyakorlati alkalmazása is elképzelhető.

Függelék

Függelék A - A hullámfüggvény

A.1. Hullámfüggvény a hagyományos hullámvezetőben

Az általános esetet tekintve az alábbi sajátértékegyenletet kell megoldanunk mind a hagyományos hullámvezető, mind pedig a szupravezető tartományban[8]:

$$\begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & -H_0^* \end{pmatrix} \Psi = E \Psi, \quad (\text{A-1})$$

ahol Ψ egy kétkomponensű spinor. (Az első komponense elektronszerű, a második komponense pedig lyukszerű.) Először határozzuk meg a hullámfüggvény alakját a hullámvezető tartományban. Ekkor $\Delta = 0$, hisz ez csak a szupravezetőre gapje. Végül is az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\begin{pmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & -H_0^* \end{pmatrix} \Psi^{(N)} = E \Psi^{(N)} \quad \Psi^{(N)} = \begin{pmatrix} \Psi_c^{(N)} \\ \Psi_h^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A-2})$$

ahol a H_0 operátorra érvényes:

$$H_0 = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m_N} - E_F^{(N)}. \quad (\text{A-3})$$

Mivel a mátrixoperátor diagonális, a $\Psi^{(N)}$ spinor komponenseire egymástól független, de ugyanolyan alakú egyenleteket kapunk. Ez kicsit egyszerűsíti a helyzetet. Mielőtt azonban megkezdénénk a számolásokat, meg kell adnunk a vektorpotenciál alakját. Érdekes Coulomb-mértékben dolgoznunk, hisz ekkor $\mathbf{p}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ épp $\text{div } \mathbf{A} = 0$ -nak köszönhetően. Nyilván \mathbf{A} nem függhet z -től, hisz kétdimenziós problémát vizsgálunk. Ha szeretnénk megőrizni a rendszer y irányú eltolás invarianciáját is, akkor \mathbf{A} y -től sem függhet. További feltételek, hogy $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ egy z irányú homogén tér, valamint $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Mindebből elég könnyen adódik a vektorpotenciál:

$$\mathbf{A} = B \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A-4})$$

Ha behelyettesítjük a vektorpotenciált az (A-3) egyenletbe, akkor az alábbi operátorhoz jutunk²:

$$H_0 = \frac{1}{2m_N} \left[-\hbar (\partial_x^2 + \partial_y^2) - 2 \frac{eB\hbar}{ci} x \partial_y + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 x^2 \right] - E_F^{(N)}. \quad (\text{A-5})$$

²Feltesszük, hogy a probléma síkbeli, vagyis az impulzusoperátor harmadik komponensétől eltekintünk.

A megoldandó egyenletünk pedig:

$$H_0 \Psi_e^{(N)} = E \Psi_e^{(N)}. \quad (\text{A-6})$$

A megoldásokat keressük szorzat alakban: $\Psi_e^{(N)} = \chi_e(y) \Phi_e^{(N)}(x)$:

$$\begin{aligned} H_0 \Psi_e^{(N)} &= \\ &= \frac{1}{2m_N} \left[-\hbar \left(\chi_e'' \Phi_e^{(N)} + \chi_e \Phi_e^{(N)''} \right) - 2 \frac{eB\hbar}{ci} x \chi_e' \Phi_e^{(N)} + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 x^2 \chi_e \Phi_e^{(N)} \right] - E_F^{(N)} \chi_e \Phi_e^{(N)} = \\ &= E \chi_e \Phi_e^{(N)}. \end{aligned}$$

Vezessük be a $k_F^{(N)2} = \frac{2m_N E_F^{(N)}}{\hbar^2}$ Fermi-hullámszám jelölést. Ekkor az előző egyenlet átírható:

$$-\frac{1}{k_F^{(N)2}} \frac{\chi_e''}{\chi_e} - \frac{1}{k_F^{(N)2}} \frac{\Phi_e^{(N)''}}{\Phi_e^{(N)}} - \frac{eB\hbar}{im_N c E_F^{(N)}} x \frac{\chi_e'}{\chi_e} + \left(\frac{eB}{k_F^{(N)} \hbar c} \right)^2 x^2 = \frac{E}{E_F^{(N)}} + 1. \quad (\text{A-7})$$

$\chi_e(x)$ helyébe egyszerű próbafüggvényt helyettesíthetünk: $\chi_e(y) = e^{\pm i k_y y}$.³ Mivel y irányban nincs határfeltételünk, egy folytonos paramétert kaptunk k_y személyében. Ekkor az egyenletünk az alábbi módon egyszerűsödik:

$$\Phi_e^{(N)''} - \left[\left(\frac{eB}{k_F^{(N)} \hbar c} \right)^2 x^2 - k_F^{(N)2} \frac{eB\hbar}{m_N c E_F^{(N)}} k_y x - \left[\left(\frac{E}{E_F^{(N)}} + 1 \right) k_F^{(N)2} - k_y^2 \right] \right] \Phi_e^{(N)} = 0. \quad (\text{A-8})$$

Most alakítsuk át a $\Phi_e^{(N)''} - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \Phi_e^{(N)} = 0$ alakú egyenletünket

$\Phi_e^{(N)''} - \left(\frac{1}{4} \xi(x)^2 + a \right) \Phi_e^{(N)} = 0$ alakúra. Rövid számolással adódik:

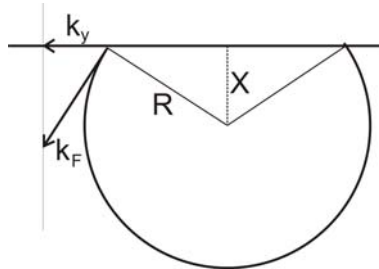
$$\xi = \sqrt{2} \frac{x - X}{L}, \quad a = - \left(\frac{E}{\hbar \omega_c} + \frac{\nu_0}{2} \right). \quad (\text{A-9})$$

Az összefüggésekben (mint ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk) célszerű volt bevezetni az alábbi paramétereket:

- $L = \sqrt{\frac{c\hbar}{|eB|}}$ távolság dimenziójú, ún. karakterisztikus mágneses távolság.
- $X = \text{Sign}(eB)L^2 k_y$ - Szemléletes jelentését az A-1. ábrán látható, mely az elektron körpályamozgását mutatja. Hasonló háromszögek oldalainak arányát felírva $\frac{k_y}{k_F^{(N)}} = \frac{X}{R}$ adódik. Rövid számolással kiderül, hogy $X = \text{Sign}(eB)L^2 k_y$, ami éppen a bevezetett paraméter. A keresett szemléletes jelentés tehát a klasszikus ciklotron pálya középpontjának ordinátája, amit gyakran guiding-centernek neveznek az irodalomban.
- $\omega_c = \frac{|eB|}{m_N c}$, a klasszikus ciklotron körfrekvencia.

³Megjegyezzük, hogy a teljes képhez hozzátartozna még egy tetszőleges konstans fázisfaktor is az exponenciális függvény kitevőjében. Ez a faktor egyszerűen csak az y tengely menti eltolásnak felelne meg, de beolvaszthatjuk az általános megoldáshoz tartozó konstans együtthatóba is, ezért nem kell ezzel törődnünk.

- $\nu_0 = \frac{2E_F^{(N)}}{\hbar\omega_c}$ - Egy végtelen kiterjedésű közegben melyben homogén mágneses mezőt keltünk az energiaszintek $\hbar\omega_c$ közönként követik egymást[15]. Ha a pályák energiájának felső korlátja a Fermi-energia, a lehetséges állapotok száma közelítőleg ν_0 lesz, mivel minden energiájú pályát két elektron tud betölteni.



A-1. ábra. Az elektron klasszikus körmozgása.

Vegyük észre, hogy az előző lépéssel egyúttal dimenziótlantottuk is az (A-8) egyenletünket, és az alábbiakat kapjuk:

$$\frac{d^2\Phi_e^{(N)}}{d\xi^2} - \left[\frac{1}{4}\xi^2 - \left(\frac{E}{\hbar\omega_c} + \frac{\nu_0}{2} \right) \right] \Phi_e^{(N)} = 0. \quad (\text{A-10})$$

Egy parabolikus hengerdifferenciálegyenlethez jutottunk, melynek általános megoldása konfluens hipergeometrikus függvények [10] segítségével írható fel:

$$\Phi_e^{(N)}(\xi) = A\xi e^{-\frac{\xi^2}{4}} {}_1F_1\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{\xi^2}{2}\right) + B e^{-\frac{\xi^2}{4}} {}_1F_1\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\xi^2}{2}\right). \quad (\text{A-11})$$

Az egyenletekben szereplő paraméterek az (A-9) egyenlettel adóttak, a konfluens hipergeometrikus függvények pedig az alábbi módon állnak elő:

$${}_1F_1(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}, \quad (\text{A-12})$$

ahol $(a)_k$ és $(b)_k$ az ún. Pochhammer-szimbólumok:

$$(x)_k = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\dots(x+1-n).$$

Sajnos, a helyzet korántsem olyan egyszerű, mint ahogy az első pillantásra tűnik. A hipergeometrikus függvényeket ugyanis nagyon nehéz numerikusan kezelni. A függvények ugyan $\xi \sim 0$ környékén „jámbor” módon viselkednek, de egy kritikus értéket meghaladva a független változóval, még az exponenciális függvénynél is jóval meredekebben változnak; „elszállnak” a végtelenbe. Ezért egy kicsit módosítjuk a megoldásunkat. A már megismert partikuláris megoldásokat lineárokombináljuk, így jutunk el a Whittaker-függvényhez[10]:

$$U(a, \xi) = \cos\left(\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right) Y_1(a, \xi) - \sin\left(\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right) Y_2(a, \xi), \quad (\text{A-13})$$

illetve:

$$V(a, \xi) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)} \left[\sin\left(\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right) Y_1(a, \xi) + \cos\left(\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right) Y_2(a, \xi) \right]. \quad (\text{A-14})$$

Az összefüggésekben:

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{\frac{a}{2} + \frac{1}{4}}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} {}_1F_1\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\xi^2}{2}\right); \quad (\text{A-15})$$

$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{a}{2}\right)}{2^{\frac{a}{2} - \frac{1}{4}}} \xi e^{-\frac{\xi^2}{4}} {}_1F_1\left(\frac{a}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{\xi^2}{2}\right). \quad (\text{A-16})$$

A bevezetett függvényeknek a következő előnyös tulajdonságuk van: $\lim_{x \rightarrow \infty} U = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} V = \infty$. Ezen kívül a szakirodalom sokkal több módszert kínál analitikus közelítésekre a Whittaker-függvények esetében[10]. Ezekre a lehetőségekre a későbbiekben még szükségünk lesz. A módosított megoldásunk tehát:

$$\Phi_e^{(N)}(\xi) = A U(a, \xi) + B V(a, \xi). \quad (\text{A-17})$$

A megoldáshoz természetesen hozzátartoznak a megkerülhetetlen határfeltételek is. Helyezzük az x tengely kezdőpontját a szupravezető és a hagyományos hullámvezető határfelületére. A hullámvezető másik határfelületén ($x = H$) a hullámfüggvény azonosan 0 kell legyen a végtelen potenciálfal határfeltételnek megfelelően. Az (A-17) egyenlettel megadott $\Phi_e^{(N)}$ függvényben szereplő együtthatókra ez az alábbi megkötést jelenti:

$$\beta = \frac{B}{A} = -\frac{U(a, \xi_H)}{V(a, \xi_H)}; \quad (\text{A-18})$$

$$\xi_H = \xi(x = H) = \sqrt{2} \frac{H - X}{L}.$$

Az $x = 0$ határfelületen a hullámfüggvényt természetesen illeszteniünk kell a szupravezetőben kiszámolt hullámfüggvénnyel. Ezt itt még nem tudjuk elvégezni, majd későbbre hagyjuk. Összegezve, az (A-17) egyenlettel adott megoldás az alábbi módon adható meg:

$$\Phi_e^{(N)}(\xi) = A_e \left(U(a, \xi) + \beta V(a, \xi) \right). \quad (\text{A-19})$$

Ekkor a teljes megoldás:

$$\Psi_e^{(N)}(x, y) = A_e \left(U(a, \xi) + \beta V(a, \xi) \right) e^{ik_y y}. \quad (\text{A-20})$$

A megoldásban szereplő β, a és $\xi(x)$ paraméterek az (A-18) és (A-9) egyenletekkel adottak.

A $\Psi^{(N)}$ spinor második komponensére vonatkozó egyenlet, mint ahogy már mondtuk, nagyon hasonló az első komponensre vonatkozó egyenlethez⁴:

$$-H_0^* \Psi_h^{(N)}(x, y) = E \Psi_h^{(N)}(x, y). \quad (\text{A-21})$$

⁴Nézzük az (A-2) egyenletet.

Az (A-3) egyenlet segítségével könnyen meggyőződhetünk arról is, hogy:

$$H_0^* = H_0(-B) = \frac{(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m_N} - E_F^{(N)}. \quad (\text{A-22})$$

Ha az (A-21) egyenletben figyelembe vesszük a felbukkanó negatív előjelet is, akkor a $\Psi_h^{(N)}$ megoldás könnyen adódik:

$$\Psi_h^{(N)}(x, y) = \frac{A_h}{A_e} \Psi_e^{(N)}(-B, -E), \quad (\text{A-23})$$

illetve:

$$\Phi_h^{(N)}(x) = \Phi_e^{(N)}(-B, -E). \quad (\text{A-24})$$

Összegezve: Az (A-23) és (A-20) egyenletekkel megadtuk a hullámvezetőben rendre a lyuk és az elektron hullámfüggvényének általános alakját. Ezek után a számolásokat a szupravezetős tartományban folytatjuk.

A.2. Hullámfüggvény a szupravezetőben

Kiindulási összefüggésünk az (A-1) egyenlet:

$$\begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & -H_0^* \end{pmatrix} \Psi^{(S)} = E \Psi^{(S)} \quad \Psi^{(S)} = \begin{pmatrix} \Psi_e^{(S)} \\ \Psi_h^{(S)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A-25})$$

Az egyszerűség kedvéért nem vesszük figyelembe a mágneses mező exponenciálisan lecsüngő behatolását a szupravezetőbe. A könnyebb megértés érdekében az egész tartományban nullának tekintjük.⁵ Ekkor a fenti egyenletben szereplő operátorok nagyon egyszerűek:

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_S} - E_F^{(S)}. \quad (\text{A-26})$$

Megjegyezzük, hogy az összefüggésekben az m_S effektív tömeg és az $E_F^{(S)}$ Fermi-energia nem feltétlenül egyezik meg a hagyományos hullámvezetőben felvett értékekkel. (Ebből adódóan a Fermi-hullámszám is más lesz.) További bonyodalmat okoz a számolásokban, hogy a szupravezetőben $\Delta \neq 0$. Tegyük fel azonban, hogy Δ valós, azaz $\Delta^* = \Delta$. A $\Psi^{(S)}$ spinor komponenseire ebben az esetben összefüggő, de még szeparálható egyenleteket kapunk. A megoldást most is szorzat alakban keressük:

$$\Psi^{(S)} = \begin{pmatrix} \Phi_e^{(S)}(x) \\ \Phi_h^{(S)}(x) \end{pmatrix} \chi_e(y).$$

Ekkor a differenciálegyenlet-rendszer:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_S} \chi'' \Phi_e^{(S)} - \frac{\hbar^2}{2m_S} \chi \Phi_e^{(S)''} - E_F^{(S)} \chi \Phi_e^{(S)} + \Delta \chi \Phi_h^{(S)} = E \chi \Phi_e^{(S)} \quad (\text{A-27})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_S} \chi'' \Phi_h^{(S)} + \frac{\hbar^2}{2m_S} \chi \Phi_h^{(S)''} + E_F^{(S)} \chi \Phi_h^{(S)} + \Delta \chi \Phi_e^{(S)} = E \chi \Phi_h^{(S)}. \quad (\text{A-28})$$

⁵Ezzel nem sértjük meg a potenciál folytonosságát sem.

Az előző alfejezethez hasonlóan a $\chi(x)$ függvény legyen $\chi = e^{iky}$ alakú. Bevezetve az $\varepsilon^{(S)} = \frac{E}{E_F^{(S)}}$ és a $k_F^{(S)2} = \frac{2m_s E_F^{(S)}}{\hbar^2}$ Fermi-hullámszám jelöléseket, az előző egyenletrendszer az alábbi módon módosul:

$$\frac{k_y^2}{k_F^{(S)2}} - \frac{1}{k_F^{(S)2}} \frac{\Phi_e^{(S)''}}{\Phi_e^{(S)}} = \varepsilon^{(S)} + 1 - \frac{\Delta}{E_F^{(S)}} \frac{\Phi_h^{(S)}}{\Phi_e^{(S)}} \quad (\text{A-29})$$

$$-\frac{k_y^2}{k_F^{(S)2}} + \frac{1}{k_F^{(S)2}} \frac{\Phi_h^{(S)''}}{\Phi_h^{(S)}} = \varepsilon^{(S)} - 1 - \frac{\Delta}{E_F^{(S)}} \frac{\Phi_e^{(S)}}{\Phi_h^{(S)}}. \quad (\text{A-30})$$

Az egyenletrendszernek matematikailag négy független megoldása van. Ezek lineárkombinációja az általános megoldás. Közülük azonban csak kettő teljesíti a határfeltételeket: megköveteljük, hogy a hullámfüggvény $x \rightarrow -\infty$ -ben legyen nulla. Az egyes független megoldások $e^{\pm k_x^{(e/h)} x}$ alakúak. A kitevőkben szereplő előjelek közül csak az egyik elégítheti ki az előbb említett határfeltételt külön-külön k_x^e és k_x^h esetében. Ezért marad csak két független megoldás, melyek segítségével az általános megoldás az alábbi módon írható fel:

$$\Phi^{(S)}(x) = C_+ \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ 1 \end{pmatrix} \Phi_+^{(S)}(x) + C_- \begin{pmatrix} \gamma_- \\ 1 \end{pmatrix} \Phi_-^{(S)}(x). \quad (\text{A-31})$$

Differenciálszámítási alapismereteket felhasználva az ismeretlen $\Phi_-^{(S)}$ és $\Phi_+^{(S)}$ függvények, melyek tudják a határfeltételt is, az alábbi alakúak:

$$\Phi_+^{(S)} = \exp\left(ik_F^{(S)} \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k_F^{(S)2}} - i\eta x}\right), \quad \Phi_-^{(S)} = \exp\left(-ik_F^{(S)} \sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k_F^{(S)2}} + i\eta x}\right). \quad (\text{A-32})$$

Az összefüggésekben:

$$\eta = \frac{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{E_F^{(S)}}.$$

Szükségünk van még az (A-31) egyenletben szereplő $\gamma_{(\pm)}$ együtthatókra. Az egyenletrendszer megoldása során ezekre a következőt kapjuk:

$$\gamma_+ = \frac{\Delta}{E + i\sqrt{\Delta^2 - E^2}} \quad \gamma_- = \frac{\Delta}{E - i\sqrt{\Delta^2 - E^2}}. \quad (\text{A-33})$$

Vegyük észre, hogy a megoldásban szereplő mennyiségekre érvényes:

$$\gamma_+ = \gamma_-^*, \quad \Phi_+^{(S)} = \Phi_-^{(S)}(-E)^* = \Phi_-^{(S)}(E)^*. \quad (\text{A-34})$$

Ezeket a tulajdonságokat később még felhasználjuk. Mindent egybevetve a hullámfüggvény az alábbi formulával adott:

$$\Psi^{(S)} = \left[C_+ \begin{pmatrix} \gamma_+ \\ 1 \end{pmatrix} \Phi_+^{(S)}(x) + C_- \begin{pmatrix} \gamma_- \\ 1 \end{pmatrix} \Phi_-^{(S)}(x) \right] e^{iky}. \quad (\text{A-35})$$

Az összefüggésben láthatóan csatolva vannak egymással az elektron- és lyukszerű komponensek. Ez a tény is mutatja, hogy a szupravezetőben nem lehet különbséget tenni az elektronáram és a lyukáram között.

A.3. A hullámfüggvények illesztése a határfelületen

A szupravezető határfelületén a hullámfüggvények az alábbi egyenleteket elégítik ki[14]:

$$\begin{aligned} \Psi^{(N)}|_{x=0} &= \Psi^{(S)}|_{x=0} \\ \frac{d}{dy} \left[\Psi^{(N)} - \frac{m_N}{m_S} \Psi^{(S)} \right] \Big|_{x=0} &= \frac{2m_N}{\hbar^2} U_0 \Psi^{(N)}|_{x=0} \quad \forall y, k_y . \end{aligned} \quad (\text{A-36})$$

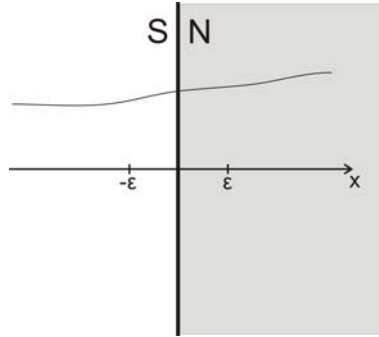
Az első egyenlet egyszerűen a hullámfüggvény folytonosságát követeli meg, a második egyenlet pedig a Schrödinger-egyenlet integrálja a határfelületen. Legyenek a Ψ spinor komponensei u és v . Ekkor a Schrödinger-egyenletnek két „egyforma” komponense van. Integráljuk közülük az egyiket az A-2. ábrán látható kicsi $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumon:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - E_F u + \Delta v \right) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E u \, dx .$$

Mivel az integrálási tartomány határártmenetben 0, csak az alábbi differenciális tag maradhat meg integrálás után:

$$-\left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 = -\left(\frac{\hbar^2}{2m^{(S)}} \frac{\partial u^{(S)}}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m^{(N)}} \frac{\partial u^{(N)}}{\partial x} \right) .$$

Ha hozzáveszünk még az előzőekben felírt integrálegyenlethez egy $V = U_0 \delta(x)$ Dirac-delta-szerű potenciálfalat is a hullámvezető oldalon, éppen a felírt határfeltételhez jutunk. A Dirac-delta szerű potenciálfal a határfelületen kialakuló oxidréteget modellezzük. Ideális esetben ezzel nem kell foglalkoznunk. A Schrödinger-egyenlet másik komponense teljesen analóg módon adódik. Az (A-36) egyenletrendszernek a megoldásával kapjuk meg az (A-20),(A-23) és az (A-



A-2. ábra. A hullámfüggvény-átmenet a hullámvezető (N) és a szupravezető (S) határfelületén.

35) egyenletekben szereplő A_e , A_h , C_e és C_h együtthatókat. Láthatóan egy lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk. Akkor kapunk triviálistól különböző megoldást, ha az egyenletrendszer mátrixának a determinánsa 0. A számolások könnyítéséért bevezetjük a $Z = \frac{2m_N}{\hbar^2} U_0$ jelölést:

$$\begin{vmatrix} \Phi_e^{(N)} & 0 & -\Phi_+^{(S)} \gamma_+ & -\Phi_-^{(S)} \gamma_- \\ 0 & \Phi_h^{(N)} & -\Phi_+^{(S)} & -\Phi_-^{(S)} \\ \frac{d}{dx} \Phi_e^{(N)} & 0 & -\gamma_+ \left[Z \Phi_+^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_+^{(S)} \right] & -\gamma_- \left[Z \Phi_-^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_-^{(S)} \right] \\ 0 & \frac{d}{dx} \Phi_h^{(N)} & -\left[Z \Phi_+^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_+^{(S)} \right] & -\left[Z \Phi_-^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_-^{(S)} \right] \Big|_{x=0} = 0 . \end{vmatrix}$$

A felírt 4×4 -es determináns nehezen kezelhető, még numerikusan is. Ne feledjük el ugyanis, hogy ezzel a feltétellel elvileg egy $E(k_x)$ függvényt kellene kapnunk. Egy kis ügyeskedéssel jelentősen megkönnyíthetnénk a munkánkat: A determináns szerinti első és harmadik, ill. második és negyedik egyenletekből kiküszöbölhetjük A_e -t és A_h -t. Ekkor az alábbi egyenletrendszerünk marad:

$$\left\{ \Phi_e^{(N)} \left[Z\Phi_+^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_+^{(S)} \right] - \left(\frac{d}{dx} \Phi_e^{(N)} \right) \Phi_+^{(S)} \right\}_{x=0} \gamma_+ C_{++} + \left\{ \Phi_e^{(N)} \left[Z\Phi_-^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_-^{(S)} \right] - \left(\frac{d}{dx} \Phi_e^{(N)} \right) \Phi_-^{(S)} \right\}_{x=0} \gamma_- C_- = 0, \quad (\text{A-37})$$

$$\left\{ \Phi_h^{(N)} \left[Z\Phi_+^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_+^{(S)} \right] - \left(\frac{d}{dx} \Phi_h^{(N)} \right) \Phi_+^{(S)} \right\}_{x=0} C_{++} + \left\{ \Phi_h^{(N)} \left[Z\Phi_-^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_-^{(S)} \right] - \left(\frac{d}{dx} \Phi_h^{(N)} \right) \Phi_-^{(S)} \right\}_{x=0} C_- = 0. \quad (\text{A-38})$$

Vagy egy kicsit egyszerűbb formában:

$$\begin{aligned} D_1 \gamma_+ C_+ + D_2 \gamma_- C_- &= 0 \\ D_3 C_+ + D_4 C_- &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A-39})$$

Az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nulla kell legyen nem triviális megoldások esetén:

$$D_1 D_4 \gamma_+ - D_2 D_3 \gamma_- = 0. \quad (\text{A-40})$$

Most tudjuk majd hasznát venni az (A-24) és az (A-34) összefüggésekkel megadott tulajdonságoknak:

$$\begin{aligned} \Phi_h^{(N)} &= \Phi_e^{(N)}(-B, -E), \\ \Phi_+^{(S)} &= \Phi_-^{(S)}(-E)^* = \Phi_-^{(S)}(E)^*, \\ \gamma_+ &= \gamma_-^*. \end{aligned} \quad (\text{A-41})$$

Az (A-37), (A-38) és az (A-39) összefüggések és a fentiekben felírt azonosságok segítségével könnyen utánagondolhatunk, hogy:

$$D_1 = D_2^* \quad D_3 = D_4^* \quad D_1 = D_4(-B, -E)^*. \quad (\text{A-42})$$

Az (A-40) összefüggéssel adott feltétel ekkor az alábbi alakot ölti:

$$\boxed{\Im \{D_1 D_4 \gamma_+\} = 0}. \quad (\text{A-43})$$

Az összefüggésben $\Im(z)$ a z komplex szám képzetes részét jelöli. Továbbá:

$$D_1 = \left| \begin{array}{c} \Phi_e^{(N)} \\ \frac{d}{dx} \Phi_e^{(N)} \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \Phi_+^{(S)} \\ Z\Phi_+^{(S)} + \frac{m_N}{m_S} \frac{d}{dx} \Phi_+^{(S)} \end{array} \right| \right. \quad \text{és:} \quad D_4 = D_1(-B, -E)^*. \quad (\text{A-44})$$

Függelék B - Szemiklasszikus közelítések

A szemiklasszikus közelítések azért fontosak, hogy szemléletes képet kapjunk az egzakt kvantummechanika eredményeiről. A hagyományos szemléletben síkhullámokat rendelünk a „darabos” részecskékhez. Ezekben a hozzárendelésekben a síkhullám fázisfüggvénye hordozza azokat az információkat, melyek a részecskék leírásához szükségesek.

A számolások elején megmutatjuk, hogy ha E jó megoldása a határfeltételnek, akkor $-E$ is jó sajátérték, csak éppen más hullámfüggvényekkel. A pontos állítás a következő:

$$\begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & -H_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & -H_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v^* \\ u^* \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} -v^* \\ u^* \end{pmatrix}. \quad (\text{B-1})$$

Az állítás könnyen belátható: Ha vesszük az első mátrixegyenlet első egyenletének a konjugáltját, akkor épp a második mátrixegyenlet második egyenletét kapjuk. Hasonlóan, ha az első mátrixegyenlet második egyenletét konjugáljuk, akkor a második mátrixegyenlet első egyenletével ekvivalens egyenletet kapunk. Ebből adódóan elegendő a szekuláris egyenlet pozitív gyökeivel foglalkoznunk. Vegyük észre, hogy a fenti állításban egyúttal megadtuk a negatív sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényeket is.

B.1. Andreev-fázistolás

A szemiklasszikus közelítések során a részecskék hullámfüggvényét síkhullámokkal közelítjük. Ez a közelítés elvárásaink szerint azonos pontossági szintű, mint a következő szakaszban tárgyalt Bohr-Sommerfeld -féle kvantálási feltétel, azaz mindkét esetben ugyanahhoz a kvantálási egyenlethez jutunk el. Az utóbbinak az az előnye, hogy az egyenletben szereplő egyes tagoknak konkrét fizikai jelentést tulajdonítunk. Térjünk vissza az (A-10) egyenlettel megadott differenciálegyenlethez:

$$\frac{d^2 \Phi_e^{(N)}}{d\xi^2} - \left[\frac{1}{4} \xi^2 - \left(\frac{E}{\hbar \omega_c} + \frac{\nu_0}{2} \right) \right] \Phi_e^{(N)} = 0.$$

Ennek az egyenletnek voltak a megoldásai a Whittaker-függvények. Most azonban a szemiklasszikus közelítő megoldásokat keressük. Optikai analógia alapján eikonál-közelítést alkalmazunk[11]. Legyen

$$Q(\xi) = \left(\frac{E}{\hbar \omega_c} + \frac{\nu_0}{2} \right) - \frac{1}{4} \xi^2. \quad (\text{B-2})$$

Ekkor az előző differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 \Phi_e^{(N)}}{d\xi^2} + Q(\xi) \Phi_e^{(N)} = 0 .$$

Amennyiben $\sqrt{|Q(\xi)|}$ egy lassan változó függvény, úgy a differenciálegyenlet közelítő megoldása:

$$\Phi_e^{(N)} \sim \text{Exp} \left(i \int_{\xi} \sqrt{|Q(\vartheta)|} d\vartheta \right) . \quad (\text{B-3})$$

A $\sqrt{|Q(\xi)|}$ függvény változási ütemét a ν_0 kvantumparaméter szabályozza. Minél nagyobb a kontrollparaméter, a derivált annál kisebb. Tehát szemiklasszikus közelítéseink nagy kvantumszámok mellett lesznek érvényesek, ahogy ez várható is. A (B-4) összefüggés az (A-10) differenciálegyenlet két független partikuláris megoldását foglalja magába:

$$u_1 = \cos \left(\int_{\xi(\tau_+^e)}^{\xi(x)} \sqrt{|Q(\vartheta)|} d\vartheta \right) \quad u_2 = \sin \left(\int_{\xi(\tau_+^e)}^{\xi(x)} \sqrt{|Q(\vartheta)|} d\vartheta \right) \quad (\text{B-4})$$

Ezek a partikuláris megoldások rendre a Whittaker-függvények (U és V) fázis tagjainak a közelítései[12]. A (B-4) egyenletben τ_+^e a (2.17) egyenlettel megadott klasszikus fordulópont[15]. A továbbiakban azzal a határesettel foglalkozunk ebben a szakaszban, amikor a hullámvezető végtelenül vastag. Ekkor az U függvény lecsengése miatt a másik független megoldásra (V függvény) nem lesz szükségünk, mert a határfeltétel asszimptotikusan magától teljesül. (A hullámvezető átellenes oldalán a hullámfüggvény Dirichlet-határfeltételt elégít ki.) Az U függvény közelítő formuláját behelyettesítjük a (2.11) egyenlettel adott határfeltételbe, majd szinte gépiesen kifejtve a determinánsokat az alábbi egyenlet adódik:

$$\mathfrak{I}(\gamma_+ D_1 D_4) = 0 \quad \iff \quad -\frac{\sqrt{\Delta^2 - E^2}}{\Delta} \cos(\varphi^e - \varphi^h) - \frac{E}{\Delta} \sin(\varphi^e - \varphi^h) = 0 ,$$

ahol φ^e és φ^h az elektron- és lyukszerű állapotok fázisait jelöli a szupravezető határfelületén:

$$\begin{aligned} \varphi^e &= \int_{\xi(\tau_+^e)}^{\xi(0)} \sqrt{|Q(\vartheta)|} d\vartheta = \frac{|eB|}{\hbar} \int_{\tau_+^e}^0 \sqrt{R_c^2 - (x - X)^2} dx = \\ &= -\frac{|eB|}{\hbar} \frac{R_c^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin} \frac{X}{R_c} + \frac{\sin \left(2 \text{asin} \frac{X}{R_c} \right)}{2} \right) \quad \text{ahol: } R_c = \frac{2m(E_F + E)}{|eB|} . \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

A lyukszerű állapotok fázisát a már megszokott változócserevel kapjuk: $\varphi^h = \varphi^e(-B, -E)$. Az összefüggésekben megjelenő X paraméter a klasszikus ciklotron középpont ordinátáját jelöli ((A-9) egyenlet). A számolásokat a határesetnek megfelelően az „A” típusú módusokra (B-1. ábra) végeztük el. A többi típusú pályakonfiguráció analóg módon adódik, csupán

a fordulópontokat kell megfelelően megválasztanunk elektronszerű és lyukszerű állapotokra egyaránt, valamint a másik független megoldástól sem szabad eltekintenünk. A trigonometrikus függvények argumentumát első rendben sorbafejtve:

$$\varphi^e - \varphi^h = -\frac{E}{\hbar\omega_c}\pi - k_F R \left(\text{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin\left(2 \text{asin} \frac{X}{R}\right)}{2} \right), \quad (\text{B-6})$$

ahol $R = \frac{2mE_F}{|eB|}$ a klasszikus ciklotronsugár és $\omega_c = \frac{\hbar k_F}{|eB|}$ a ciklotron-körfrekvencia. Végezetül pedig a (2.11) egyenletben lévő determinánsok kifejtésével egy kis rendezéssel a következőt kapjuk:

$$\frac{E}{\hbar\omega_c}\pi + k_F R \left(\text{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin\left(2 \text{asin} \frac{X}{R}\right)}{2} \right) - \text{acos} \frac{E}{\Delta} = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B-7})$$

A részecskék klasszikus értelemben periodikus mozgást végeznek x irányban. A soron következő számolásokkal megmutatjuk, hogy a (B-7) egyenlet átírható

$$\frac{1}{\hbar} \oint p_x dx - 2 \text{acos} \frac{E}{\Delta} = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{B-8})$$

alakúra, ahol p_x a kanonikus impulzus x vetülete. Az integrál nem más, mint a kvázirészecskék hatásintegrálja a pályák x vetületére egy periódus alatt. A (B-8) egyenlet a Bohr-Sommerfeld-féle kvantálási feltételt jelenti[15]. Az egyenlet bal oldalán a hatásintegrál melletti tag a kvantálási feltételben megjelenő extra fázistaggal egyenlő. A kvázirészecskék mozgását a B-1. ábra szemlélteti. A mozgás körívek uniójaként áll elő. Az egyes körívek pontjainak koordinátái:

$$x = X + \frac{v_y}{\omega_c} \quad y = Y - \frac{v_x}{\omega_c}. \quad (\text{B-9})$$

Ahol $[X, Y]$ az egyes körívek középpontjának koordinátáit, $[v_x, v_y]$ pedig a kvázirészecskék aktuális sebességét jelöli; ω_c a már régen megismert ciklotron körfrekvenciával egyenlő. Klasszikusan egy részecske impulzusa:

$$p_x = mv_x = m\omega_c(Y - y) = m\omega_c \sqrt{R^2 - (X - x)^2},$$

ahol R a pálya ciklotron sugara. Mivel a vektorpotenciálnak nincs x irányú komponense, a kanonikus impulzus x vetülete megegyezik a klasszikus impulzus megfelelő vetületével. A hatásintegrált szétbontjuk két részre: elektronszerűre és lyukszerűre. A teljes hatáshoz mindekkettő szükséges⁶, de mivel ugyanúgy számolhatóak ki, csak az elektronszerűt vezetjük le:

$$\frac{1}{\hbar} \oint_{\text{elektron}} p_x dx = 2 \frac{|eB|}{\hbar} \int_0^{R+X} \sqrt{R^2 - (X - x)^2} dx = \frac{|eB|}{\hbar} R^2 \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin\left(2 \text{asin} \frac{X}{R}\right)}{2} \right). \quad (\text{B-10})$$

Az előző egyenletben nem mást számoltunk ki, mint a B-1. ábrán bejelölt, az elektron mozgása során határolt terület fluxusát \hbar/e egységben. A Bohr-Sommerfeld-féle kvantálási feltétel ekkor szemléletesen a pályák által határolt fluxus nagyságát kvantálja meg.

⁶Egy periódusban mindekkettő megjelenik.

Lyukra a hatásintegrál egyszerűen egy $X \rightarrow -X$ és $E \rightarrow -E$ cserével kapható meg. Az elektronnak és a lyuknak kicsit eltér a totális energiája ($\pm E_F + E$), így a körpályák sugarai sem lesznek azonosak. Az előző egyenletet ezért a pontosság kedvéért el kell látnunk megfelelő $R_e = R(E)$, $R_h = R(-E)$ jelölésekkel. Megjegyezzük, hogy a ciklotronközéppont oordinátája (X) egy előjel erejéig független attól, hogy lyukról vagy elektronnól van-e szó. Ezért nem kell ellátnunk megkülönböztető indexekkel. Az eredő hatást az elektronszerű és lyukszerű komponensek összege adja. Mivel azonban a lyuknak negatív effektív tömege van⁷, a kiszámolt fluxusokat pontosabban ki kell vonnunk egymásból:

$$S = \frac{|eB|}{\hbar} R_e^2 \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin} \frac{X_e}{R_e} + \frac{\sin \left(2 \text{asin} \frac{X_e}{R_e} \right)}{2} \right) - \frac{|eB|}{\hbar} R_h^2 \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin} \frac{-X_h}{R_h} + \frac{\sin \left(2 \text{asin} \frac{-X_h}{R_h} \right)}{2} \right).$$

Rövid számolással:

$$S = \frac{2E}{\hbar \omega_c} \pi + 2k_F R \left(\text{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin \left(2 \text{asin} \frac{X}{R} \right)}{2} \right), \quad (\text{B-11})$$

ahol az index nélküli mennyiségek E_F abszolút energiájú részecskére vonatkoznak. A rendezések során felhasználtuk, hogy jól viselkedő függvényre igaz ($E \ll E_F$):

$$f(E) + f(-E) \approx 2f(0) + \left. \frac{df}{dE} \right|_{E=0} E + \left. \frac{df}{dE} \right|_{E=0} (-E) = 2f(0).$$

Az eredményt behelyettesítve a (B-8) egyenletbe épp a (B-7) egyenletet kapjuk vissza. Az eikonál-közelítés és a Bohr-Sommerfeld -féle kvantálási feltétel tehát egyenrangú közelítések. Ez nyilvánvalóan igaz az összes többi módusra is.

Az eredmények egyezésével a Bohr-Sommerfeld -féle kvantálási feltételben megjelenő extra fázistagra deríthetünk fényt: az elektron-lyuk páros $\gamma_A = -\text{acos} \frac{E}{\Delta}$ fázistolást kap, ha a szupravezető felületén ütköznek. Mivel a mi esetünkben egy periódus alatt két ütközés zajlik le, összesen kétszer kell ezt a fázistolást számbavennünk. A Bohr-Sommerfeld -közelítések során a kausztikák nem adnak járulékot, mivel szimmetriai okok miatt az elektronok és lyukak ugyanannyi kausztikát érintenek egy periódus alatt és kioltják egymás hatását.

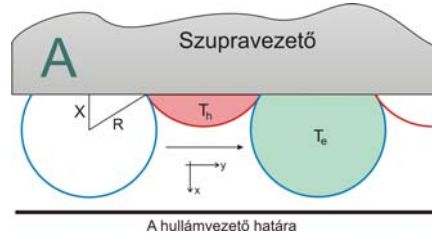
B.2. Bohr-Sommerfeld -féle kvantálási feltételek

„A” típusú pályák:

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

$$\begin{aligned} \text{Az elektronok nem érnek le a hullámvezető faláig:} & \quad \tau_+^e = H \\ \text{A lyukak sem érnek le a hullámvezető faláig:} & \quad \tau_+^h < H \\ \text{A szupravezetőhöz mindkettlen hozzáérnek:} & \quad \tau_-^e, \tau_-^h = 0 \end{aligned}$$

⁷A magyarázat a dolgozat bevezetőjében szerepel.



B-1. ábra. „A” típusú pálya

A hatást az előző szakaszban már kiszámoltuk:

$$S = \frac{2E}{\hbar\omega_c}\pi + 2k_F R \left(\text{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin\left(2 \text{asin} \frac{X}{R}\right)}{2} \right), \quad (\text{B-12})$$

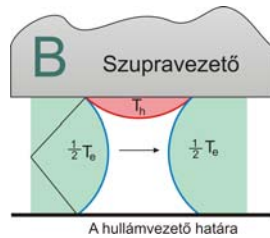
A γ fázisfaktor ebben az esetben a szupravezető felületén való ütközésekből és a kausztikák érintéséből tevődik össze. Ez utóbbiból nem kapunk járulékot, mert a lyukak és elektronok szimmetriai okok miatt ugyanannyi kausztikát érintenek. Az előző szakaszban megmutattuk, hogy a két Andreev-reflexióból a pályák

$$\gamma = -2 \text{acos} \frac{E}{\Delta} \quad (\text{B-13})$$

fázisjárulékot szedhetnek össze. Mindent összerakva a kvantumfeltétel:

$$\frac{E}{\hbar\omega_c}\pi + k_F R \left(\text{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin\left(2 \text{asin} \frac{X}{R}\right)}{2} \right) - \text{acos} \frac{E}{\Delta} = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B-14})$$

„B” típusú pályák:



B-2. ábra. „B” típusú pálya

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

| | |
|--|--------------------------|
| Az elektronok leérnek a hullámvezető faláig: | $\tau_+^e = H$ |
| A lyukak nem érnek le a hullámvezető faláig: | $\tau_+^h < H$ |
| A szupravezetőhöz mindketten hozzáérnek: | $\tau_-^e, \tau_-^h = 0$ |

A hatás rövid számolás után adódik:

$$S_B = \frac{2}{\hbar\omega_c} \left[(E_F + E) \left(\text{asin} \alpha_e + \frac{\sin(2 \text{asin} \alpha_e)}{2} \right) - (E_F - E) \frac{\pi}{2} \right] + 2k_F R \left(\text{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin\left(2 \text{asin} \frac{X}{R}\right)}{2} \right).$$

Az egyenletben:

$$\alpha_e = \frac{H - X}{R_e} \quad R_e = \frac{\sqrt{2|m|(E_F + E)}}{|eB|} \quad R = \frac{\sqrt{2|m|E_F}}{|eB|}. \quad (\text{B-15})$$

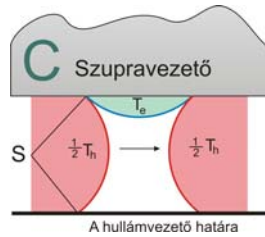
Még egyszer megjegyezzük, hogy a ciklotronközeppon tordinátája (X) egy előjel erejéig független attól, hogy lyukról vagy elektronnól van-e szó. Ezért nem kell ellátnunk megkülönböztető indexekkel. Ekkor a kvantálási feltétel:

$$S_B + \gamma = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B-16})$$

A γ fázisfaktor egyrészt a szupravezető felületén történő ütközés miatt különbözik nullától, de nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy az elektron a hullámvezető átellenes oldalán is ütközik egy végtelen potenciálfallal, valamint a kvázirészecskék pályáinak kausztikáiból is adódik járulék. (A Függelék D fejezetben a kausztikával kapcsolatos számolásaink szerint a „B” típusú pályákban csak a lyuk összetevőnek van kausztikája) Mindent összevetve, az előző kvantálási feltétel:

$$S_B - 2 \operatorname{acos} \frac{E}{\Delta} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B-17})$$

„C” típusú pályák:



B-3. ábra. „C” típusú pálya

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

$$\begin{aligned} \text{Az elektronok nem érnek le a hullámvezető faláig} & \quad \tau_+^e < H \\ \text{A lyukak leérnek a hullámvezető faláig} & \quad \tau_+^h = H \\ \text{A szupravezetőhöz mindketten hozzáérnek:} & \quad \tau_-^e, \tau_-^h = 0 \end{aligned}$$

A hatás rövid számolás után adódik:

$$S_c = \frac{2}{\hbar\omega_c} \left[(E_F + E) \frac{\pi}{2} - (E_F - E) \left(\operatorname{asin} \alpha_h + \frac{\sin(2 \operatorname{asin} \alpha_h)}{2} \right) \right] + 2k_F R \left(\operatorname{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin(2 \operatorname{asin} \frac{X}{R})}{2} \right).$$

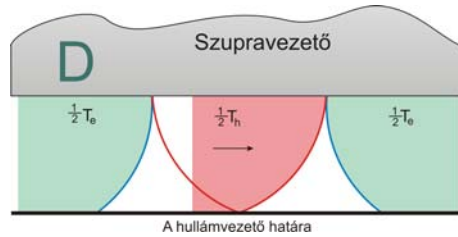
Az egyenletben:

$$\alpha_h = \frac{H + X}{R_h} \quad R_h = \frac{\sqrt{2|m|(E_F - E)}}{|eB|} \quad R = \frac{\sqrt{2|m|E_F}}{|eB|}. \quad (\text{B-18})$$

A kvantálási feltételben $\gamma = -2 \operatorname{acos} \frac{E}{\Delta} + \pi - \pi/2$, ahol a tagok rendre a szupravezetővel és a végtelen potenciálfallal való ütközést, valamint a kausztika járulékát jelentik. Ebben az esetben csak az elektronok pályáiban van kausztika⁸, mely $-\frac{\pi}{2}$ extra fázisjárulékot ad, vagyis a Bohr-Sommerd-féle kvantálási feltétel:

$$S_c - 2 \operatorname{acos} \frac{E}{\Delta} + \frac{1}{2}\pi = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (\text{B-19})$$

„D” típusú pályák:



B-4. ábra. „D” típusú pálya

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

- Az elektronok leérnek a hullámvezető faláig $\tau_+^e = H$
- A lyukak is leérnek a hullámvezető faláig $\tau_+^h = H$
- A szupravezetőhöz mindketten hozzáérnek: $\tau_-^e, \tau_-^h = 0$

A hatás rövid számolás után adódik:

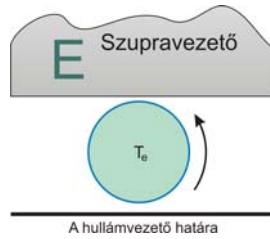
$$S_D = \frac{2}{\hbar\omega_c} \left[(E_F + E) \left(\operatorname{asin} \alpha_e + \frac{\sin(2 \operatorname{asin} \alpha_e)}{2} \right) - (E_F - E) \left(\operatorname{asin} \alpha_h + \frac{\sin(2 \operatorname{asin} \alpha_h)}{2} \right) \right] + 2k_F R \left(\operatorname{asin} \frac{X}{R} + \frac{\sin(2 \operatorname{asin} \frac{X}{R})}{2} \right) .$$

Az egyenletben $\alpha_e, \alpha_h, R_e, R_h$ éa R a (B-15) meg (B-18) egyenletekben megismert mennyiségek. A kvantálási feltételben szereplő extra fázistag pedig: $\gamma = -2 \operatorname{acos} \frac{E}{\Delta} + 2\pi \rightarrow -2 \operatorname{acos} \frac{E}{\Delta}$ -nak adódik. A kausztika fázisjárulékai nullára összegződnek. Ekkor a kvantálási feltétel:

$$S_D - 2 \operatorname{acos} \frac{E}{\Delta} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (\text{B-20})$$

„E” típusú pályák:

⁸A kausztika ugyanolyan mint a „B” esetben, csak a kék és piros színek, azaz az elektronok és lyukak cserélődnek fel.



B-5. ábra. „E” típusú pálya

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

$$\begin{aligned} \text{Az elektronok nem érnek fel a szupravezetőig} & \quad \tau_+^e > 0 \\ \text{Az elektronok nem ütköznek az átellenes oldalon sem} & \quad \tau_-^e < H \end{aligned}$$

A hatás nagyon egyszerűen adódik:

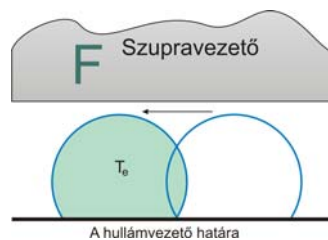
$$S_e = \frac{2\pi}{\hbar\omega_c}(E_F + E).$$

Ebben az esetben az extra fázis tag kicsit trükkös. Ha egy egyenes minden pontja köré azonos sugarú köröket rajzolunk, két kausztikagörbét kapunk, melyek nem mások, mint az egyenestől sugárnyi távolságra lévő egyenesek. A rendszerünk y irányban eltolás-invariáns, ezért az előbbi kausztikás megfontolásokat számításba kell vennünk: $\gamma = -\pi/2 - \pi/2 = -\pi$. A kvantálási feltétel tehát:

$$\boxed{\frac{2\pi}{\hbar\omega_c}(E_F + E) - \pi = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}}. \quad (\text{B-21})$$

Vegyük észre, hogy a (B-21) egyenlettel megadott kvantumfeltétel független az X paraméter változásától⁹. Az energiaspektrumban ez energianívókban, azaz vízszintes grafikonokban nyilvánul meg. Ezeket a nívókat Landau-nívóknak nevezzük.

„F” típusú pályák:



B-6. ábra. „F” típusú pálya

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

$$\begin{aligned} \text{Az elektronok nem érnek fel a szupravezetőig} & \quad \tau_-^h > 0 \\ \text{Az elektronok ütköznek az átellenes oldalon} & \quad \tau_+^h = H \end{aligned}$$

⁹A pályák megvalósulásának feltételei természetesen szükségesek.

A hatás rövid számolással:

$$S_F = \frac{2}{\hbar\omega_c}(E_F + E) \left[\frac{\pi}{2} + \text{asin } \alpha_e + \frac{\sin(2 \text{asin } \alpha_e)}{2} \right]. \quad (\text{B-22})$$

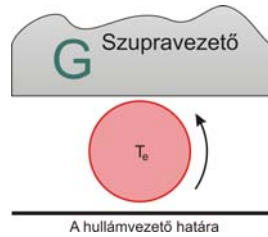
Az egyenletben α_e a (B-15) egyenletben megismert mennyiség. A hullámvezető végtelen potenciálfalán végigpattogó elektronoknak is van kausztikájuk. Ezzel a rendszerrel már a bevezetőben megismerkedtünk. Bár a kausztikagörbéket egzaktul nem számoltuk ki, az 1.3. ábrán nagyon jól megfigyelhetők. A kausztikát minden elektron egy periódus alatt pontosan egyszer érint. Ekkor, ha figyelembe vesszük a végtelen potenciálfalal való ütközés π fázisjárulékát is: $\gamma = \pi - \pi/2 = \pi/2$. A kvantálási feltétel pedig:

$$\boxed{S_F + \frac{\pi}{2} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}}. \quad (\text{B-23})$$

Az előző két pályatípust lyukakra teljesen azonos módon kapjuk meg, csak nem szabad elfeledkeznünk a levezetések során megbeszélt formális különbségekről:

1. A hatást negatív előjellel kell figyelembe vennünk.
2. A kausztika $\pi/2$ fázistolást okoz.
3. A lyukaknak „ $E_F - E$ ” energiájuk van az elektronok „ $E_F + E$ ” energiája helyett.

„G” típusú pályák:



B-7. ábra. „G” típusú pálya

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

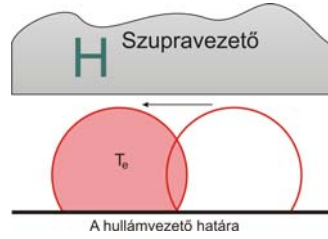
$$\begin{array}{ll} \text{A lyukak nem érnek fel a szupravezetőig} & \tau_-^h > 0 \\ \text{A lyukak nem ütköznek az átellenes oldalon sem} & \tau_+^h < H \end{array}$$

A hatás nagyon egyszerűen adódik:

$$S_G = -\frac{2\pi}{\hbar\omega_c}(E_F - E).$$

Az extra fázisjárulék: $\gamma = \pi/2 + \pi/2 = \pi$. A kvantálási feltétel tehát:

$$\boxed{-\frac{2\pi}{\hbar\omega_c}(E_F + E) + \pi = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}}. \quad (\text{B-24})$$



B-8. ábra. „H” típusú pálya

„H” típusú pályák:

Ezek a pályák akkor valósulnak meg, ha:

$$\begin{aligned} \text{A lyukak nem érnek fel a szupravezetőig} & \quad \tau_-^h > 0 \\ \text{A lyukak ütköznek az átellenes oldalon} & \quad \tau_+^h = H \end{aligned}$$

A hatás rövid számolással:

$$S_h = -\frac{2}{\hbar\omega_c}(E_F - E) \left[\frac{\pi}{2} + \text{asin } \alpha_h + \frac{\sin(2 \text{asin } \alpha_h)}{2} \right]. \quad (\text{B-25})$$

Az egyenletben $\alpha \widehat{e}$ a (B-18) egyenletben megismert mennyiség. Az extra fázisjárulék: $\gamma = \pi + \pi/2 = \frac{3}{2}\pi$. A kvantálási feltétel pedig:

$$\boxed{S_h + \frac{3}{2}\pi = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}}. \quad (\text{B-26})$$

Függelék C - Konduktancia

C.1. A hullámfüggvény közelítő meghatározása pályák interferenciájával

A WKB közelítés szerint[20] a perturbálatlan hullámfüggvényt a kollektorhoz közeli $(H - \delta x, L)$ pontban az idevezető pályák interferenciájaként kapjuk meg. Egyelőre kényelmes lesz, ha csak azokkal a pályákkal foglalkozunk, melyek elektronként érkeznek meg a kollektorba. Később egyszerű módosításokkal számításba tudjuk venni a lyukak hatását is az áramvezetésben. Az elektronok egyes pályáinak járulékait egy amplitúdó A_p és egy fázisfaktor $e^{i\Phi_p}$ szorzataként kapjuk. Először az amplitúdó-összetevőt írjuk fel:

$$A_p = \sqrt{\frac{I_i \cos \alpha_p}{2v_F} \frac{1}{p \cdot \frac{d}{d\alpha} w(\alpha_p)}} = \sqrt{\frac{I_i \cos \alpha_p}{2v_F} \frac{w(\alpha_p)}{L \cdot \frac{d}{d\alpha} w(\alpha_p)}} . \quad (\text{C-1})$$

Az egyes pályákat, mint ahogy látjuk is, egy p paraméterrel különböztetjük meg egymástól, mely paraméterrel az elektronok ütközéseit számoljuk a hullámvezető határfelületén. Az amplitúdófaktorra vonatkozó (C-1) összefüggésben minden tagnak fontos szerepe van az árammegmaradás kielégítése miatt. A pontszerű injektorból a rendszerbe vezetett áramnak (I_i) jó közelítéssel koszinuszos szögeloszlása van. A magyarázat egyszerű: A kicsi méretű lyukon beáramló elektronok sebességének a lyuk keresztmetszetébe eső vetülete egyenletes valószínűségi eloszlással közelíthető. Ezzel az érveléssel jogosnak tűnik a koszinuszos árameloszlás. A (C-1) egyenletben szereplő első tört jelentése így kézenfekvő, hiszen az árameloszlás integrálja az árammegmaradás törvénye miatt meg kell hogy egyezzen a bevezetett árammal. A második tört kicsit trükkösebb: A $d\alpha$ szöghatározatlansággal belőtt elektronok egy csatornán belül mozognak, mely csatorna az ütközések során egyre csak tágul. A tágulás során az áramsűrűség csökken, a kontinuitási egyenlet miatt pedig épp fordított arányosságban a csatorna keresztmetszetével. A csatorna vastagságát a hullámvezető fala mentén kell meghatároznunk, innen adódik a „periódustávolság” deriváltja. A fázisfaktort a Bohr-Sommerfeld-féle közelítések során végzett számításokhoz hasonlóan kapjuk meg. Kiszámoljuk a pályamenti hatásintegrált és összeszámoljuk határfelületeken és kausztikákon összeszedett extra fázisjárulékokat.

$$\Phi = \frac{1}{\hbar} \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} + \Gamma . \quad (\text{C-2})$$

Az összefüggésben $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}$ a kanonikus impulzus. Könnyű számolással utánajárhatunk, hogy:

$$S = \frac{1}{\hbar} \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = k_F \cdot (s_e - s_h) + \frac{eB}{\hbar} (O_e - O_h) , \quad (\text{C-3})$$

ahol s_e és s_h rendre az elektron és lyuk által befutott körívek hosszát, O_e és O_h pedig a körívek és a szupravezető-határfelület által közrefogott területet jelentik. Természetesen nem szabad elfeledkeznünk arról sem, hogy a határfelülethez elég közel most is egy beeső és egy visszavert síkhullám összege adja meg a hullámfüggvényt. A beeső és visszavert síkhullám csak a fázislagban különböznek egymástól. Klasszikusan a részecskék a „B” és „D” típusú pályákon haladva tudnak eljutni a kollektorba, azzal a feltétellel, hogy az injektorból elektronok lépnek ki. Ezekre a pályákra számoljuk ki tehát a hatásintegrálokat:

- „B” típusú pályák

Legyen

$$S_p^B = k_F L \frac{2\alpha_p - 4\varphi_p - \pi + \text{Sign}(eB) \left[\alpha_p - 2\varphi_p - \frac{\pi}{2} - \sin(\alpha_p - \varphi_p) - \frac{\sin(2\varphi_p)}{2} + \kappa(\cos \varphi_p - \cos \alpha_p) \right]}{4 \cos \varphi_p - 2 \cos \alpha_p} . \quad (\text{C-4})$$

Ekkor a beeső síkhullám hatásintegrálja:

$$S_{p \text{ in}}^B = S_p^B - \cos \alpha_p k_F \delta x . \quad (\text{C-5})$$

A visszavert síkhullám hatásintegrálja pedig:

$$S_{p \text{ ref}}^B = S_p^B + \cos \alpha_p k_F \delta x . \quad (\text{C-6})$$

- „D” típusú pályák

$$S_p^D = k_F L \frac{2\alpha_p - 4\varphi_p - 2\varepsilon_p + \text{Sign}(eB) \left[\alpha_p - 2\varphi_p - \varepsilon - \sin(\alpha_p - \varphi_p) - \sin(\varepsilon_p + \varphi_p) + \kappa(\cos \varepsilon_p - \cos \alpha_p) \right]}{4 \cos \varphi_p - 2 \cos \alpha_p - 2 \cos \varepsilon_p} . \quad (\text{C-7})$$

Az előzőekhez hasonlóan a beeső síkhullám hatásintegrálja:

$$S_{p \text{ in}}^D = S_p^D - \cos \alpha_p k_F \delta x . \quad (\text{C-8})$$

A visszavert síkhullám hatásintegrálja pedig:

$$S_{p \text{ ref}}^D = S_p^D + \cos \alpha_p k_F \delta x . \quad (\text{C-9})$$

A kifejezésekben használt szögek megegyeznek a kausztikával kapcsolatos számolások során bevezetett szögekkel. (D-2. és D-4. ábra) Összeszámolva az extra fázisjárulékokat is:

- „B” típusú pályák

$$\text{beeső síkhullám: } \Phi_{p \text{ in}}^B = S_{p \text{ in}}^B + \left(\frac{P}{2} - 1 \right) \pi \quad (\text{C-10})$$

$$\text{visszavert síkhullám: } \Phi_{p \text{ ref}}^B = S_{p \text{ in}}^B + \frac{P}{2} \pi \quad (\text{C-11})$$

- „D” típusú pályák

$$\text{beeső síkhullám: } \Phi_{p \text{ in}}^D = S_{p \text{ in}}^D + (p - 1)\pi \quad (\text{C-12})$$

$$\text{visszavert síkhullám: } \Phi_{p \text{ ref}}^D = S_{p \text{ in}}^D + p\pi \quad (\text{C-13})$$

Összegyűjtve az eredményeket:

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial x}(H, L) = -2ik_F \left(\sum_{p \geq p_{\min}} \cos \alpha_p A_p e^{i\Phi_p^B \text{ in}} + \sum_{p_{\max} \geq p \geq p_{\min}} \cos \alpha_p A_p e^{i\Phi_p^D \text{ in}} \right). \quad (\text{C-14})$$

A beeső és visszavert síkhullámok fázisjáruléka $\delta x \rightarrow 0$ határátmenetben épp π -ben különböznek egymástól, ezért könnyű matematikával az előző összefüggésben már megszabadultunk a „ref” index használatától. A továbbiakban elhagyjuk a beeső hullám jelölésére használt „in” jelzőt is, de a fázisfaktor alatt mindig a beeső hullám fázisát fogjuk érteni.

C.2. Módusok összegzése

A (C-14) egyenletben a hullámfüggvény felírásához használt fázisfaktorok nagyon gyorsan változnak az ütközési paraméter, p változtatásával. Az interferáló tagok így sok helyen teljesen kiolthatják egymást. Lényeges járulékot ott kapunk, ahol Φ_p -nek 2π -re vonatkozó maradéka nagyon kicsit változik. Vegyük Φ_p helyett a vele ekvivalens $\widetilde{\Phi}_p = \Phi_p - 2\pi n p$ fázist, ahol n valamegyik pályához tartozó kvantumszám. Ezekkel a kvantumszámokkal a szemiklasszikus közelítések során már találkoztunk. Továbbá a (C-2) egyenletben szereplő hatásintegrált átírhatjuk:

$$\Phi = \frac{1}{\hbar} \int \mathbf{p} \, d\mathbf{l} + \Gamma = p(S_x + S_y) + \Gamma. \quad (\text{C-15})$$

A bevezetett S_x és S_y mennyiségek, a megfelelő tengelyre eső pályavetület hatásintegrálja egy periódusra. Vagyis az S_x éppen a szemiklasszikus közelítések során, a B.2 alfejezetben felírt hatásintegrállal egyenlő. A Γ -val jelölt fázisadalek is szoros kapcsolatban van a Bohr-Sommerfeld-féle kvantálási feltételek során megbeszélte γ fázistolásokkal: $\Gamma = p\gamma - \pi$. Ekkor:

$$\widetilde{\Phi}_p = p(S_x + \gamma - 2n\pi) + p S_y - \pi. \quad (\text{C-16})$$

A továbbiakban elrugaszkodunk attól a megszorításunktól, hogy az ütközési szám p csak egész lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy p olyan értéket vesz fel, melyhez olyan pályakonfiguráció tartozik $(\alpha_p, \varphi_p, \varepsilon_p)$, mely épp egy módust határoz meg. Ekkor a (C-16) egyenlet zárójelében lévő kifejezés 0, és első rendben nem is függ p -től. Ráadásul a megvalósított módus y irányban egy síkhullámmal megegyező propagáló terjedést végez, ezért: $p S_y = k_{y_n} L$, ami szintén nem függ p -től. (k_{y_n} a 2.2 fejezetben megismert, n . módushoz tartozó kvantumszám.) Az elmondottak szerint:

$$\frac{d}{dp} \widetilde{\Phi}_{p_n} = 0 \quad \text{és:} \quad \widetilde{\Phi}_{p_n} = k_{y_n} L - \pi. \quad (\text{C-17})$$

A fázisfaktor tehát épp a módusok környékén ad lényeges járulékot, hiszen a 2π -re vonatkozó maradéktag ezeken a helyeken változik a legcsekélyebb mértékben. Ez nagyon nagy előrelépés a rendszer áramvezetésének megértésében, hiszen igaznak bizonyult azon természetesnek tűnő feltételezésünk, hogy az áram a módusokkal terjed.

A számolásokat egy hasonlóan nagyszabású ötlettel folytatjuk: A szilárdtestfizikában gyakran használt nyeregpontmódszerrel próbáljuk elvégezni a pályákra vonatkozó összegzéseket. Mivel a fázisfaktornak a módusok helyén szélsőértéke van:

$$\tilde{\Phi}_p \approx \tilde{\Phi}_{p_n} + \frac{1}{2} (p - p_n)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}}{\partial p_n^2} = k_{y_n} L - \pi + \frac{1}{2} (p - p_n)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}}{\partial p_n^2}. \quad (\text{C-18})$$

Helyettesítsük be ezt a sorfejtést a (C-14) egyenletbe. Összegeznünk kell a lehetséges módusokra, azonban az ütközésszámokra való összegzést integrálással helyettesítjük:

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial x}(H - \delta x, L) = -2ik_F \left(\sum_{K=B,D} \sum_n \cos \alpha_{p_n}^K A_{p_n}^K e^{ik_{y_n}^K L - i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}^K}{\partial p_n^2} (p - p_n)^2} \right). \quad (\text{C-19})$$

Az összefüggésben megjelenő integrál egy $\sigma = \sqrt{i \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}^K}{\partial p_n^2} \right)^{-1}}$ szórású Gauss-görbének tekinthető, így az integrál értéke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{(p - p_n)^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi}\sigma = \sqrt{2\pi i \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}^K}{\partial p_n^2} \right)^{-1}}. \quad (\text{C-20})$$

Tehát:

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial x}(H, L) = -2ik_F \left(\sum_{K=B,D} \sum_n \sqrt{2\pi i \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_{p_n}^K}{\partial p_n^2} \right)^{-1}} \cos \alpha_{p_n}^K A_{p_n}^K e^{ik_{y_n}^K L - i\pi} \right). \quad (\text{C-21})$$

A (C-21) egyenlettel egy jól programozható összefüggést konstruáltunk. Előbb azonban részletesebben meg kell vizsgálnunk, mely módusokra is kell összegeznünk. Rövid kutatás után kiderül, hogy a „D” típusú pályák összes lehetséges módusa részt vehet az áramszállításban. A „B” típusú pályák esetében azonban nem ez a helyzet. Meglepetést most is a már jól megismert háromszög-pálya okozhat. Legutóbb az energiaspektrum parabolyszerű rajzolatánál találoztunk az említett konfigurációval, amikor előjelet váltott a hullámfüggvény csoportsebessége. Klasszikusan ezek a pályák a kollektorral ellentétes irányban távolodnak az injektortól, vagyis nem szállíthatnak áramot a kollektorba. Ezt a numerikus számolások is alátámasztják, mivel az ilyen módusokhoz tartozó n kvantumszám nem eredményez $\tilde{\Phi}_p$ -ben semmilyen szélsőértéket. (Legalábbis ami a $p > 0$ értékeket illeti.) Összegezve tehát, azokra a módusokra kell összegezni, melyek csoportsebessége megegyezik a „D” típusú módusok csoportsebességével.

C.3. A lyukak járuléka

Hogy megkapjuk a lyukak járulékat, nem kell sokat számolnunk, csupán kicsit módosítjuk az elektronok vizsgálata során levezetett összefüggéseket. Kezdjük rögtön a kvantumszámokkal módosított fázissal:

$$\widetilde{\Phi}_p^{hole} = \left(p + \frac{1}{2}\right)(\Phi_x + \Phi_y) + \left(p - \frac{1}{2}\right)\pi - 2n\pi p. \quad (C-22)$$

p -vel most is az elektronok ütközésszámát jelöljük, vagyis hogy a bemenet és kimenet közé hányszor tudjuk lefektetni az egész periódust. A $\Phi_x + \Phi_y$ hatásintegrált a (C-7) egyenlettel adott S_p^D hatásból az alábbi módon kapjuk meg:

$$\Phi_x + \Phi_y = \frac{S_p^D}{p + \frac{1}{2}}. \quad (C-23)$$

Könnyen beláthatjuk, hogy a fázisfaktor most is szélsőértéket vesz fel, amennyiben a p ütközési szám egy módust határoz meg. Az értékét a szélsőértékek helyén azonban ebben az esetben nem kapjuk meg olyan egyszerűen, mint ezelőtt. A Bohr-Sommerfeld-féle kvantumfeltételből tudjuk, hogy

$$\Phi_x + \pi = 2n\pi. \quad (C-24)$$

Ezt behelyettesítve a (C-22) egyenletbe:

$$\widetilde{\Phi}_{p_n}^{hole} = k_{y_n}L + (n - 1)\pi. \quad (C-25)$$

A hullámfüggvényhez szükséges amplitúdófaktort a (C-1) egyenlet jobboldala adja. Ekkor az elektronok esetén megegyező levezetéssel a lyukak hullámfüggvénye a határfalhoz közel:

$$\frac{\partial \Psi_h}{\partial x}(H, L) = -2ik_F \left(\sum_n \sqrt{2\pi i \left(\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_{p_n}^{hole}}{\partial p_n^2} \right)^{-1}} \cos \alpha_{p_n}^D A_{p_n}^D e^{ik_{y_n}^D L - i\pi} \right). \quad (C-26)$$

C.4. A pontkontaktus vezetőképessége

A (2.23) egyenlettel kiszámolhatjuk a pontkontaktuson átvezetett áramot. A WKB szemiklasszikus közelítések[16] elvei szerint az n . módus Ψ_n hullámfüggvénye a határfelülethez közel egy beeső Ψ^{in} és egy visszavert Ψ^{ref} síkhullám összegeként írható fel. A síkhullámok könnyen adódnak:

$$\Psi^{in} = C \cdot e^{ik_F(y \sin \alpha_n - x \cos \alpha_n)} \quad \Psi^{ref} = C \cdot e^{ik_F(y \sin \alpha_n + x \cos \alpha_n) + i\pi}. \quad (C-27)$$

Az összefüggésekben α_n azt a szöget jelöli, mely alatt a határfalra pattanó részecske érkezik az adott módusban. Mivel a hullámfüggvény e két síkhullám összegeként közelíthető, ezért a 2.23 egyenletben szereplő:

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 \approx 4 \left| \frac{\partial \Psi^{in}}{\partial x} \right|^2 = 4(k_F \cos \alpha_n)^2 |\Psi^{in}|^2 = 4 \frac{k_F^2}{v_F} \cos \alpha_n \Phi^{in}, \quad (C-28)$$

ahol Φ^{in} a határfelületre beeső részecskék fluxusát jelöli. Klasszikusan ezt a fluxust a módus által szállított áram I_n és a hullámvezető mentén az egy periódus távolságának hányadosaként kapjuk meg. A különböző típusú pályákra ezt a távolságot más-más módon számolhatjuk ki (A kausztikáról szóló számolások (D-4) és (D-4) egyenletei), azonban együttesen $w(\alpha_n)$ -nel jelöljük őket. Ekkor:

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 \approx 4 \left| \frac{\partial \Psi^{in}}{\partial x} \right|^2 = 4 \frac{k_F^2 \cos \alpha_n}{v_F w(\alpha_n)} I_n. \quad (C-29)$$

Ezek szerint a módus által szállított áram

$$T_n = \varepsilon \frac{4k_F^2 \cos \alpha_n}{v_F w(\alpha_n)} \quad (C-30)$$

része jut át a kollektoron. A pontkontaktus vezetőképessége a Landauer formula[17][18][19] szerint:

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_n T_n. \quad (C-31)$$

C.5. Klasszikus átmenet

Állításunk szerint a szemiklasszikus és klasszikus számolások akkor vezetnek azonos eredményre, ha kicsi mágneses mezőt használunk. A C.1 szakasz eredményeiben tehát elvégezzük az „ $R \ll \sqrt{L}$ lineáris méret” közelítéseket. A (C-4) és (C-7) egyenletekkel megadott fázisokhoz szükségünk van a benne szereplő szögek közelítő ismeretére. Az α szöveget a „D” típusú pályák esetében nagyon egyszerűen az alábbi feltételből kapjuk:

$$2w(\alpha) = \frac{L}{p}. \quad (C-32)$$

A $w(\alpha)$ félperiódus-távolság a (D-22) egyenlettel adott. Sorbafejtve rövid számolással adódik, hogy:

$$2w(\alpha) \approx \frac{H^2}{R \cos \alpha} \approx \frac{L}{p}. \quad (C-33)$$

Ebből: $\cos \alpha = \frac{2pH^2}{RL}$. A φ és ε szögekre a $\varphi \approx -\alpha + d\varphi$ és $\varepsilon \approx -\alpha + d\varepsilon$ feltételezésekkel élve

$$d\varphi \approx \frac{L}{2pH}$$

és $d\varepsilon = 2\varphi$ adódik. Ne felejtsük el, hogy ha a görbületi sugár nagy, akkor az ütközésszám is az kell legyen. Ezért „ pH ” „ R ” nagyságrendű lesz, vagyis az előbb kiszámolt $d\varphi$ és $d\varepsilon$ szögek valóban kicsik lesznek. Felhasználva eredményeinket sorbafejtjük a (C-7) egyenlettel adott fázist is:

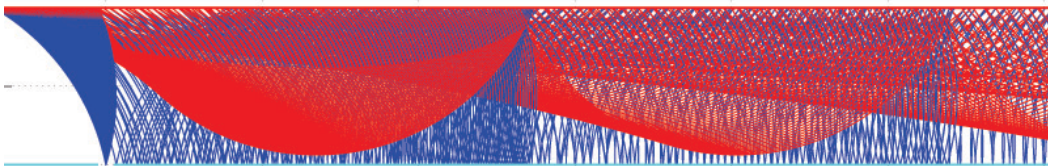
$$\Phi_p^D \approx pRk_F \left(4\alpha - 2d\varphi \left(1 - \frac{R}{H} \sin \alpha \right) \right) \approx (4\alpha k_F) pR + \frac{R^2}{H^2} k_F L \sin \alpha. \quad (C-34)$$

Ebből az adódik, hogy $\Phi_p^D \sim R^2$. Hasonló számolásokkal be lehet látni, hogy Φ_p^B is arányos R^2 -tel.

Függelék D - A rendszer kausztikája

A bevezetőben a kausztikáról elmondott általános érvényű tulajdonságok indokolják, hogy egzaktul kiszámoljuk a rendszer kausztikagörbéit. A most következő számolások kizárólag ezzel foglalkoznak. Kiderül, hogy minden típusú ütközéshez (elektron szupravezetőn, lyuk hullámvezető szabad oldalán, stb.) tartozik megfelelő kausztika. Ismerve a ciklotronpálya középpontjának koordinátáit még az első ütközéskor, a görbeegyenletek nagyon egyszerűen felírhatóak általánosan az n ütközésszám függvényeként.

D.1. Kausztika abban az esetben, amikor a lyuk csak a szupravezető felszínén ütközik

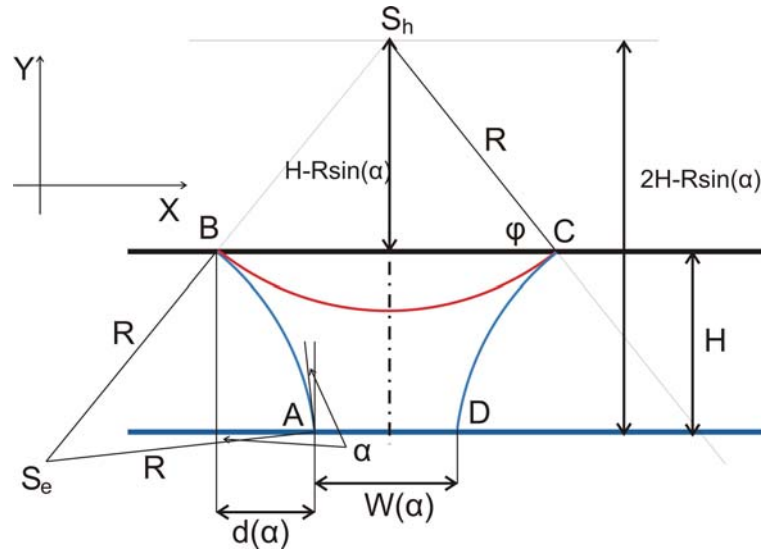


D-1. ábra. Kausztika. Kékkel az elektronok, pirossal a lyukak pályái vannak jelölve.

Figyeljük meg a D-1. ábrán látható pályákat. Az ábra elég „maszatosnak” tűnik, nehezen lehet belőle kivenni konkrét látnivalót. Ráadásul eléggé szűk tartományban belőtt elektronok (és lyukak) pályáit mutatja csak az ábra, vagyis valójában ennél még sokkal bonyolultabb a teljes pályageometria. A D-1. ábrán azonban látható, hogy a pozitív részecskéként felfogható lyukak pályáiban mégis megmutatkozik a kausztika. Ezeket a kausztikaörbéket szeretnénk expliciten meghatározni. Később kiderül az is, hogy nagyon sok kausztikagörbéje van a rendszernek, csak nehezen lehet őket meglátni.

Nézzük a D-2. ábrát, melyen az ütközések geometriáját tudjuk figyelemmel kísérni. Az elektron α szög alatt pattan le a hullámvezetőt határoló potenciálfalról. Körpályán mozog, melynek középpontja $S_e = R(-\cos \alpha; \sin \alpha)$. (Az origót az A pontba tesszük. Ügyeljünk arra is, hogy a D-2. ábrán megjelölt α szög az eddigiekhez hasonlóan negatív, ha a beesési merőleges bal oldalára van felmérve.) Az elektron pályájának egyenlete ekkor:

$$(x + R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 = R^2 . \quad (D-1)$$



D-2. ábra. Az ütközések geometriája

Az ütközési pont (B) vízszintes koordinátája az $y = H$ feltételből adódóan:

$$d = -R \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2}. \quad (\text{D-2})$$

A lyuk egy S_h középpontú, R sugarú körpályán mozog. Az S_h pont az S_e pont B -re vett tükörképével egyezik meg. Ekkor az S_h koordinátái:

$$S_h : 2 \begin{pmatrix} d \\ H \end{pmatrix} - R \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{D-3})$$

Az S_h pont illeszkedik a D-2. ábra szimmetriatengelyére. Ebből következik, hogy az elektron következő ütközési helyének távolsága ($w(\alpha)$) az S_h pont vízszintes koordinátájának a kétszeresével egyenlő. Ezt a távolságot azért fontos ismerni, mert ha több ütközést szeretnénk figyelemmel kísérni, a számolások mindig „ugyanazok” lesznek, csak az origót kell eltolnunk épp $w(\alpha)$ egész számú többszörösével. Rövid számolással:

$$w(\alpha) = 4 \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} - 2R \cos \alpha. \quad (\text{D-4})$$

Ha az elektron p -szer ütközött a hullámvezető határoló potenciálfallal, akkor az origót $w^{(p)}(\alpha) = pw(\alpha)$ értékkel kell eltolni. Most már játszva meg tudjuk mondani az elektron p . „normális” ütközését követő lyuk pályájának a középpontját, hiszen az előző összefüggéseinket, csak egy eltolással kell kiegészítenünk:

$$S_h : 2 \begin{pmatrix} w^{(p)}(\alpha) + d \\ H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^{(p)}(\alpha) - R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{D-5})$$

Rövid számolással:

$$S_h : \begin{pmatrix} S_h^x \\ S_h^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4p + 2) \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} - (2p + 1)R \cos \alpha \\ 2H - R \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{D-6})$$

A lyuk pályájának egyenlete természetesen:

$$(x - S_h^x)^2 + (y - S_h^y)^2 = R^2 . \quad (\text{D-7})$$

A (D-7) összefüggés valódi paramétere az α visszaverődési (belövési) szög. Tehát van egy egy-paraméteres görbeseregünk, melynek megpróbáljuk megtalálni a burkolóját. Deriváljuk ennek érdekében a (D-7) összefüggést a paramétere szerint¹⁰:

$$(x - S_h^x) \frac{dS_h^x}{d\alpha} + (y - S_h^y) \frac{dS_h^y}{d\alpha} = 0 . \quad (\text{D-8})$$

A burkológörbe kiszámításához a (D-7) és a (D-8) egyenletek alkotta kétismeretlenes egyenletrendszerből kellene kiküszöbölnünk az α paramétert. Ez szinte lehetetlen feladat, ezért megelégszünk, ha paraméteresen adjuk meg a burkológörbe egyenletét $X^{(p)}(\alpha)$ és $Y(\alpha)^{(p)}$ alakban. (Minden p -hez tartozik egy burkológörbe.) Behelyettesítve a (D-8) egyenletbe a középpont koordinátáit:

$$(x - S_h^x) \left((1 + 2p)R \sin \alpha + \frac{H - R \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2}} (4p + 2)R \cos \alpha \right) = (y - S_h^y)R \cos \alpha .$$

Kicsit egyszerűsítve:

$$(y - S_h^y) = (x - S_h^x) \left[(1 + 2p) \tan \alpha + \frac{H - R \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2}} (4p + 2) \right] . \quad (\text{D-9})$$

Legyen:

$$f_h(\alpha) := (1 + 2p) \tan \alpha + \frac{H - R \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2}} (4p + 2) . \quad (\text{D-10})$$

A D-2. ábra alapján az egyenletben szereplő barátságatlan törtnek szép geometriai jelentése van:

$$\frac{H - R \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2}} = \tan \varphi . \quad (\text{D-11})$$

Ekkor az f függvény sokkal szebb alakban írható:

$$f_h(\alpha) = (1 + 2p) (\tan \alpha + 2 \tan \varphi) . \quad (\text{D-12})$$

Az elvégzett számolások után az alábbi egyenletrendszerünk maradt:

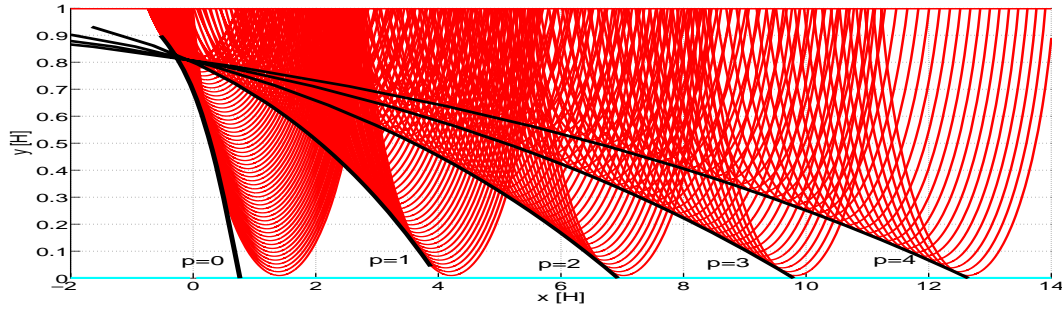
$$(x - S_h^x)^2 + (y - S_h^y)^2 = R^2 \quad (\text{D-13})$$

$$(y - S_h^y) = (x - S_h^x) \cdot f(\alpha) \quad (\text{D-14})$$

Innen már könnyen adódik a megoldás:

$$X^{(p)}(\alpha) = S_h^x(\alpha) - \frac{R}{\sqrt{f_h(\alpha)^2 + 1}} \quad Y^{(p)}(\alpha) = S_h^y(\alpha) - \frac{R f_h(\alpha)}{\sqrt{f_h(\alpha)^2 + 1}} . \quad (\text{D-15})$$

A számolás grafikus eredményeit a D-3. ábra mutatja.



D-3. ábra. A lyukak pályáinak kausztikája. A fekete görbék mutatják a számolt burkológörbét. n értékei azt mutatják, hogy az elektronok hányszor ütköztek a hullámvezetőt határoló potenciálfallal.

A kausztika paramétere a számolások kezdetétől használt α belövési szög maradt. Ez lehetőséget ad arra, hogy megmondjuk, a kausztika egyes pontjai milyen α belövési szög elektron-lyuk párosához kötődnek. Ha azt a feltételt követjük, hogy a lyukak nem ütközhetnek a hullámvezetőt határoló potenciálfalon, megszorítást kapunk α lehetséges értékeire. Maximális értékét abból a határesetből kapjuk, amikor a lyuk még éppen nem ütközik hagyományosan. Ekkor a pálya középpontja épp R magasságban van:

$$R = S_h^y = 2h - R \sin \alpha_{max} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{max} = 2\frac{H}{R} - 1} . \quad (D-16)$$

Most keressük meg a lehetséges belövési szögek α_{min} alsó határát. A rendszer fizikáját tekintve addig érdemes foglalkoznunk a pályákkal, amíg az elektronok tudnak ütközni a szupravezető határfelületén. Határesetben:

$$H = R + R \sin \alpha . \quad (D-17)$$

Az egyenlet megoldása:

$$\boxed{\alpha_{min} = \text{asin}\left(\frac{H}{R} - 1\right)} . \quad (D-18)$$

A D-3. ábrán az $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$ paramétertartományban vannak kirajzolva a kausztikagörbék a $p = 1, \dots, 4$ esetekben. E tekintetben kivételes a $p = 0$ értékhez tartozó görbe. Ahogy látni fogjuk a továbbiakban, ezt a kausztikagörbét nemcsak azok a lyukak hozzák létre, melyek nem ütköznek a hullámvezetőt határoló potenciálfallal, hanem az összes lyuk pályája hozzájárul. Tehát ebben az esetben: $\alpha \in (\alpha_{min}, \frac{\pi}{2})$ (Az is igaz, hogy ekkor a tartomány felső korlátját erősen túlbecsültük, de ez most nem számít.)

A D-3. ábrán van még egy érdekesség: A kausztikagörbék egy pontban metszik egymást. Ennek az oka egy olyan pálya, mely periodikus; az elektronok és lyukak újra meg újra ugyanazon a pályaszakaszokon futnak végig. Erre a furcsa pályára $w(\alpha_{\nabla}) = 0$, vagyis az elektronok mindig ugyanott pattannak a hullámvezetőn. A pálya feltétele:

$$w(\alpha_{\nabla}) = 0 = 4 \sqrt{R^2 - (h - R \sin \alpha_{\nabla})^2} - 2R \cos \alpha_{\nabla} . \quad (D-19)$$

¹⁰A módszert a bevezetőben ismertettük.

Az egyenlet megoldása:

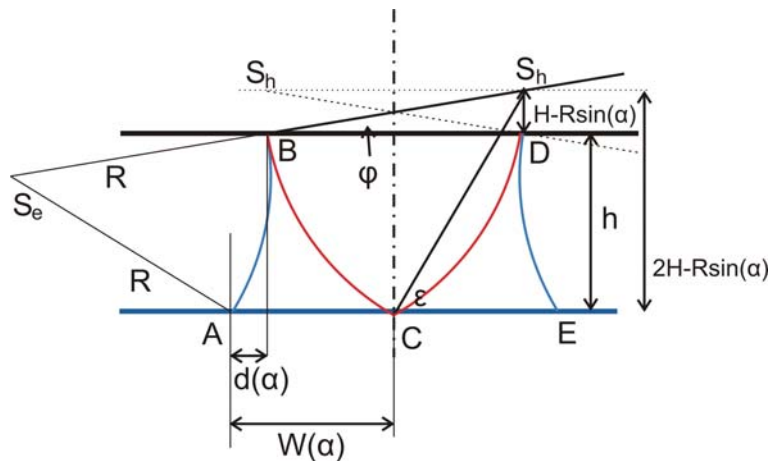
$$\alpha_{\nabla} = \text{asin} \left(\frac{4h}{3R} - \sqrt{\left(\frac{2h}{3R}\right)^2 + 1} \right). \quad (\text{D-20})$$

A pályának egy olyan háromszögrajzolata van, melynek oldalai befelé görbülnek. Ez a pályatípus nagyon sok furcsaságot fog okozni még, célszerű külön nevet adni neki. A továbbiakban tehát alakja miatt háromszögpályának fogjuk nevezni.

A lyukak kausztikáját ebben az esetben tehát kiveséztük. Azonban felmerül a kérdés, vajon az elektronok pályáinak is van-e kausztikája? Könnyen rájöhettünk, hogy az elektronok burkológörbéit teljesen analóg módon számolhatjuk ki, mint a lyukak esetében. A különbség a pályák középpontjában és az $f(\alpha)$ függvényben lesz. Érdekes módon az $f(\alpha)$ függvény a $\tan \alpha$ és $\tan \varphi$ lineáris kombinációjaként adódik, az együtthatók meg kiolvashatóak a középpont koordinátáiból. A számolások tehát könnyűek és rövidek, viszont nem adnak érdelemes kausztikát, legalábbis nem a számunkra érdekes geometriai tartományban.

D.2. Kausztika abban az esetben, amikor a lyuk ütközik a hullámvezetőt határoló potenciálfal felületén is

Ebben az esetben kicsit bonyolultabb a helyzet, a számolás eredménye és részeredményei is kicsit bővebbek. Egy olyan taggal bővülnek az egyenletek, melynek jelentése szintén értelmezhető geometriailag egy ε szög tangenseként. Az ütközések geometriáját a D-4. ábra mutatja. Félreértések elkerülése érdekében már az elején leszögezzük, hogy a belövési szögekre a következőkben mindig érvényes lesz: $\alpha > \alpha_{max}$, ahol α_{max} az előző alfejezetben kiszámolt határszöget jelenti. Könnyen látható, hogy ez a határ képezi az átmenetet a két vizsgált alfejezet között. A számolások során az alábbi távolságok ismeretére lesz szükségünk:



D-4. ábra. Az ütközések geometriája

- Az elektron becsapódását jellemző $d(\alpha)$ távolság. Ennek alakja az előzőekhez képest nem változott:

$$d(\alpha) = -R \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} . \quad (\text{D-21})$$

- A D-4. ábra szimmetriatengelyével jelölt $w(\alpha)$ távolság. Ezt a távolságot leíró összefüggés az előzőekhez képest¹¹ bővült egy taggal.

$$w(\alpha) = 2\sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} - R \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (2H - R \sin \alpha)^2} . \quad (\text{D-22})$$

A további vizsgálódást értelemszerűen 4 csoportba osztjuk aszerint, hogy elektronról, vagy lyukról; illetve felszálló, vagy leszálló pályáról van-e szó.

a.) A felszálló elektronok kausztikája (a szupravezető felé mozognak)

Az elektron p -szeres hagyományos ütközése után a felszálló elektron pályájának a középpontja:

$$S_{e1} : \begin{pmatrix} S_{e1}^x \\ S_{e1}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} - 2p \sqrt{R^2 - (2H - R \sin \alpha)^2} - (2p + 1)R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \end{pmatrix} .$$

A kausztika nyilván ugyanolyan formában adható meg, mint az előző alfejezetben. Említettük azt is, hogy a görbe paraméteres egyenletében felbukkanó $f(\alpha)$ bizonyos szögek tangensének lineáris kombinációjaként adódik. Az együtthatók pedig könnyen kiolvashatóak a körpálya középpontjának koordinátáiból. Ebben az esetben:

$$f_{e1}(\alpha) := (1 + 2p) \tan \alpha + 4p \tan \varphi - 2p \tan \varepsilon . \quad (\text{D-23})$$

Az összefüggésben a φ és ε szögeket a D-4. ábrán jelöltek szerint kell értelmezni. Ekkor érvényes:

$$\tan \varphi = \frac{H - R \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2}} , \quad \tan \varepsilon = \frac{2H - R \sin \alpha}{\sqrt{R^2 - (2H - R \sin \alpha)^2}} . \quad (\text{D-24})$$

Most már könnyen felírhatjuk a kausztika egyenletét:

$$X_{e1}^{(p)}(\alpha) = S_{e1}^w(\alpha) + \frac{R}{\sqrt{f_{e1}(\alpha)^2 + 1}} , \quad Y_{e1}^{(p)}(\alpha) = S_{e1}^y(\alpha) - \frac{R f_{e1}(\alpha)}{\sqrt{f_{e1}(\alpha)^2 + 1}} . \quad (\text{D-25})$$

A (D-25)-as összefüggésekben szereplő előjelek megválasztásának magyarázatát, most nem taglaljuk, az olvasóra bízunk. Csak annyit említünk meg, hogy elektronok esetén a kausztika egyenletében szereplő előjelek különbözőek, míg lyukak esetén megegyeznek minden esetben.

b.) A leszálló elektronok kausztikája (a hullámvezető határa felé mozognak)

¹¹lásd a (D-4) egyenletet

Az elektron p -szeres hagyományos ütközése után a leszálló elektron pályájának a középpontja:

$$S_{e2} : \begin{pmatrix} S_{e2}^x \\ S_{e2}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} - 2p \sqrt{R^2 - (2H - R \sin \alpha)^2} - (2p - 1)R \cos \alpha \\ R \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

A középpont koordinátáiból kiolvashatjuk az $f(\alpha)$ függvényt:

$$f_{e2}(\alpha) := (2p - 1) \tan \alpha + 4p \tan \varphi - 2p \tan \varepsilon. \quad (\text{D-26})$$

Így a kausztika egyenlete:

$$X_{e2}^{(p)}(\alpha) = S_{e2}^w(\alpha) - \frac{R}{\sqrt{f_{e2}(\alpha)^2 + 1}}, \quad Y_{e2}^{(p)}(\alpha) = S_{e2}^y(\alpha) + \frac{R f_{e2}(\alpha)}{\sqrt{f_{e2}(\alpha)^2 + 1}}. \quad (\text{D-27})$$

c.) A leszálló lyukak kausztikája (a hullámvezető határa felé mozognak)

Az elektron n -szeres hagyományos ütközése után a leszálló lyuk pályájának a középpontja:

$$S_{h1} : \begin{pmatrix} S_{h1}^x \\ S_{h1}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4p + 2) \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} - 2p \sqrt{R^2 - (2H - R \sin \alpha)^2} - (2p + 1)R \cos \alpha \\ 2H - R \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

A középpont koordinátáiból kiolvashatjuk az $f(\alpha)$ függvényt:

$$f_{h1}(\alpha) := (2p + 1) \tan \alpha + (4p + 2) \tan \varphi - 2p \tan \varepsilon. \quad (\text{D-28})$$

Így a kausztika egyenlete:

$$X_{h1}^{(p)}(\alpha) = S_{h1}^w(\alpha) - \frac{R}{\sqrt{f_{h1}(\alpha)^2 + 1}}, \quad Y_{h1}^{(p)}(\alpha) = S_{h1}^y(\alpha) - \frac{R f_{h1}(\alpha)}{\sqrt{f_{h1}(\alpha)^2 + 1}}. \quad (\text{D-29})$$

d.) A felszálló lyukak kausztikája (a szupravezető felé mozognak)

Az elektron p -szeres hagyományos ütközése után a felszálló lyuk pályájának a középpontja:

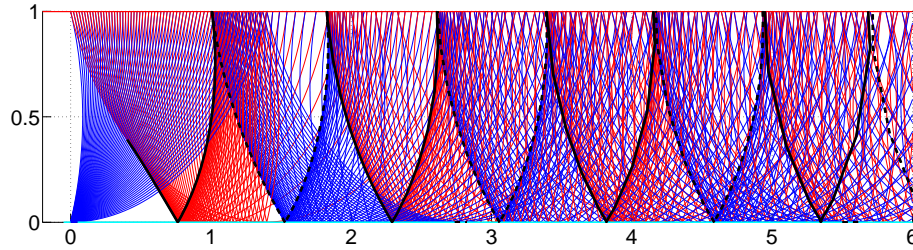
$$S_{h2} : \begin{pmatrix} S_{h2}^x \\ S_{h2}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4p + 2) \sqrt{R^2 - (H - R \sin \alpha)^2} - (2p + 2) \sqrt{R^2 - (2H - R \sin \alpha)^2} - (2p + 1)R \cos \alpha \\ 2H - R \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

A középpont koordinátáiból kiolvashatjuk az $f(\alpha)$ függvényt:

$$f_{h2}(\alpha) := (2p + 1) \tan \alpha + (4p + 2) \tan \varphi - 2p \tan \varepsilon. \quad (\text{D-30})$$

Így a kausztika egyenlete:

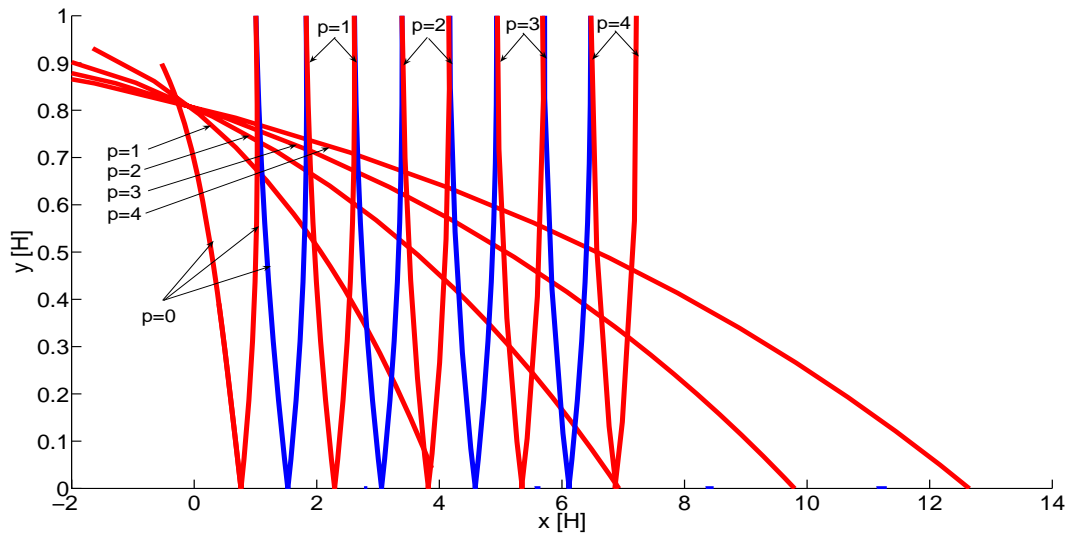
$$X_{h2}^{(p)}(\alpha) = S_{h2}^w(\alpha) + \frac{R}{\sqrt{f_{h2}(\alpha)^2 + 1}}, \quad Y_{h2}^{(p)}(\alpha) = S_{h2}^y(\alpha) + \frac{R f_{h2}(\alpha)}{\sqrt{f_{h2}(\alpha)^2 + 1}}. \quad (\text{D-31})$$



D-5. ábra. Kausztika. Kékkel az elektronok, pirossal a lyukak pályái vannak jelölve. A fekete görbék mutatják számolt burkológörbét.

Ezzel már minden esetet végigszámoltunk. Fáradságos számolásainkat követve élményt nyújt ábrázolni az eredményeinket. A kausztikákat a részecskék pályáival együtt a D-5. ábra mutatja.

Még egyszer térjünk vissza arra az esetre, amikor a lyukak még nem ütköztek a hullámvezetőt határoló potenciálfallal, vagyis $p = 0$. Ekkor ha megfigyeljük a leszálló lyukak kausztikáját, ugyanazt a kausztika egyenletet kapjuk, mint abban az esetben, amikor a lyukak pályáinak még nem volt közös pontja a hagyományos potenciálfallal. Ennek így kell lennie, hiszen ekkor a lyukak még nem érzik azt, hogy ütköznek-e „hagyományosan”, vagy nem. Végül kicsit szellősebben feltüntettük a D-6. ábrán minden egyes lehetséges kausztikagörbét, akár ütközik a lyuk a hullámvezetőt határoló potenciálfalon, akár nem.



D-6. ábra. A kausztika görbéi. Kékkel az elektronok kausztikája van jelölve, pirossal, pedig a lyukaké. p értékei azt mutatják, hogy az elektronok hányszor ütköztek a hullámvezetőt határoló potenciálfallal.

Irodalomjegyzék

- [1] C. W. J. Beenakker and H. van Houten in *Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures*, Solid State Physics, Vol. **44**, pp. 1-228, edited by H. Ehrenreich and D. Turnbull, (Academic Press, Inc. , Boston, 1991).
- [2] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic System*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [3] T. Heinzel, *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures*, (Wiley-VCH GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2003).
- [4] P. K. Polinák, C. J. Lambert, J. Koltai, J. Cserti, in *Andreev drag effect via magnetic quasi-particle focusing in normal-superconductor nanojunctions*, (2006), (cond-mat/0602423).
- [5] C. Kittel: *Bevezetés a szilárdtestfizikába*.
- [6] H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, M. E. I. Broekaart, P. H. M. Loosdrecht, B. J. van Wees, J. E. Mooij, C. T. Foxon, J. J. Harris, Phys.Rev.B **39**, 12 (1989).
- [7] H. van Houten, C. W. J. Beenakker, in *Analogies in Optics and Micro Electronics* (Quantum Point Contacts and Coherent Electron Focusing), edited by W. van Haeringen and D. Lenstra (Kluwer, Dordrecht, 1990), (cond-mat/0512611).
- [8] P. G. de Gennes: *Superconductivity of Metals and Alloys*.
- [9] L. D. Landau és E. M. Lifshitz, *Klasszikus erőterek*, 54.fejezet.
- [10] Abramowitz and Stegun: *Handbook of Mathematical Functions* (chapter 19).
- [11] J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*, (8.10. Többmódusú terjedés optikai szálakban).
- [12] J. Phys.: Condens. Matter **5** 4491-4504 , 5609-5622 (1993).
- [13] J. Cserti: Mezoszkopikus szupravezetők, IV-V.,Phd hallgatóknak.
- [14] J. Cserti, A. Bodor, J. Koltai, G. Vattay, Phys.Rev.B **69**,123514 (2004).
- [15] L. D. Landau és E. M. Lifshitz, *Kvantummechanika*
- [16] A. Messiah: *Quantum Mechanics* (Chapter VI).
- [17] M. Büttiker, Phys. Rev.Lett. **57**, 1761 (1986); IBM J. Res.Dev. **32**, 317 (1988).

- [18] R. Landauer, IBM J. Res.Dev. **1**, 223 (1957); **32**, 306 (1988).
- [19] Y. Imry, in *Directions in Condensed Matter Physics*, edited by G.Grinstein and G.Mazenko (World Scientific, Singapore, 1986), Vol. 1, p. 102.
- [20] L.S.Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981).